Federaal Planbureau
Economische analyses en vooruitzichten

WORKING PAPER 12-12

Input-outputanalyse

Modellen, Multiplicatoren, Linkages

September 2012

Caroline Hambÿe, ch@plan.be

Kunstlaan 47-49
1000 Brussel

e-mail: contact@plan.be
http://www.plan.be

Federaal Planbureau

Het Federaal Planbureau (FPB) is een instelling van openbaar nut.

Het FPB voert beleidsrelevant onderzoek uit op economisch, sociaal-economisch vlak en op het vlak van leefmilieu. Hiertoe verzamelt en analyseert het FPB gegevens, onderzoekt het aanneembare toekomstscenario's, identificeert het alternatieven, beoordeelt het de gevolgen van beleidsbeslissingen en formuleert het voorstellen.

Het stelt zijn wetenschappelijke expertise onder meer ter beschikking van de regering, het Parlement, de sociale gesprekspartners, nationale en internationale instellingen. Het FPB zorgt voor een ruime verspreiding van zijn werkzaamheden. De resultaten van zijn onderzoek worden ter kennis gebracht van de gemeenschap en dragen zo bij tot het democratisch debat.

Het Federaal Planbureau is EMAS en Ecodynamische Onderneming (drie sterren) gecertificeerd voor zijn milieubeheer.

url: http://www.plan.be
e-mail: contact@plan.be

Publicaties

Terugkerende publicaties:
Vooruitzichten
De "Short Term Update"

Planning Papers (laatste nummer):
Het doel van de "Planning Papers" is de analyse- en onderzoekswerkzaamheden van het Federaal Planbureau te verspreiden.

111 De Belgische milieurekeningen - Milieu-economische rekeningen 1990-2008
Guy Vandille, Lies Janssen - September 2012

Working Papers (laatste nummer):

11-12 De milieu-impact van de evolutie van de transportvraag tegen 2030
Dominique Gusbin, Bruno Hoornaert, Marie Vandresse en VITO - September 2012

Verantwoordelijke uitgever: Henri Bogaert
Wettelijk Depot: D/2012/7433/31

Federaal Planbureau
Kunstlaan 47-49, 1000 Brussel
tel.: +32-2-5077311
fax: +32-2-5077373
e-mail: contact@plan.be
http://www.plan.be

Input-outputanalyse

Modellen, Multiplicatoren, Linkages

September 2012

Caroline Hambÿe, ch@plan.be

Abstract - Sinds 1994 is het Federaal Planbureau verantwoordelijk voor de raming van de vijfjaarlijkse input-outputtabellen voor België. Die tabellen zijn een uniek instrument om de relaties tussen de verschillende (homogene) bedrijfstakken binnen de Belgische economie te analyseren. Wanneer die tabellen geïntegreerd worden in een input-outputmodel, geven ze snel verschillende synthetische maatstaven van die relaties. In deze paper worden twee klassieke toepassingen van de input-outputmodellen voorgesteld, namelijk de multiplicatoren en de linkagemaatstaven.

Abstract - Depuis 1994, le Bureau fédéral du Plan a dans ses attributions l'estimation des tableaux entrées-sorties quinquennaux pour la Belgique. Ces tableaux représentent un outil unique d'analyse des relations qui existent entre les différentes branches d'activité au sein de l'économie belge. Lorsqu'ils sont intégrés dans un modèle entrées-sorties, ils permettent de fournir rapidement différentes mesures synthétiques de ces relations. Cette étude est consacrée à la présentation de deux applications classiques des modèles entrées-sorties, à savoir les multiplicateurs et les mesures de linkage.

Jel Classification - C67, D57

Keywords - Input-outputmodellen, Input-outputtabellen, Multiplicatoren, Linkages

Inhoudstafel

Lijst van tabellen

Synthese

Sinds 1994 is het Federaal Planbureau verantwoordelijk voor de raming van de vijfjaarlijkse input-outputtabellen voor België. Die tabellen zijn een uniek instrument om de relaties tussen de verschillende (homogene) bedrijfstakken binnen de Belgische economie te analyseren. Wanneer die tabellen geïntegreerd worden in een input-outputmodel, geven ze snel verschillende synthetische maatstaven van die relaties.

In deze paper worden twee klassieke toepassingen van de input-outputmodellen voorgesteld, namelijk de multiplicatoren en de linkagemaatstaven. Het doel van de paper is tweevoudig. Allereerst komen we terug op de fundamenten zelf van de input-outputanalyse: de input-outputmodellen. Het gaat erom de onderliggende hypothesen waarop de verschillende modellen steunen en hun beperkingen te verduidelijken, en het belang van de keuze van het model te onderstrepen. Het tweede doel bestaat erin aan te tonen dat de input-outputanalyse die eind de jaren 30 door Wassily Leontief werd ontwikkeld, constant evolueert. Vooral de linkagemaatstaven hebben de voorbije vijftien jaar een interessante evolutie ondergaan.

Er kunnen verschillende input-outputmodellen worden afgeleid van de binnenlandse input-outputtabel. Ze worden opgedeeld in twee categorieën: enerzijds de vraaggestuurde kwantiteitsmodellen (demand-pull models), zoals het traditionele (open) model van Leontief en het gesloten model met inbegrip van het gezinsverbruik, en anderzijds, de kostengestuurde modellen (cost-push models), zoals het prijsmodel van Leontief en het model van Ghosh opgevat als een prijsmodel. Het gemengde input-outputmodel, tot slot, is een uitbreiding van het traditionele model. Op basis van dit model kan in eenzelfde model een exogene productie worden gespecificeerd voor een deel van de producten en een exogene finale vraag voor de rest van de producten.

Multiplicatoren afgeleid van input-outputmodellen worden vaak toegepast in economische impactanalyses en zijn synthetische maatstaven die de reactie van een economie op een exogene schok weergeven. Zo kunnen ze, bijvoorbeeld, gebruikt worden om de effecten te ramen van een verandering van de uitvoer of van het bestaan van quota, op de productie, het energieverbruik of de vervuilende emissies van de verschillende bedrijfstakken. In de literatuur treffen we verschillende multiplicatoren aan, volgens het input-outputmodel waarop ze gebaseerd zijn en naargelang ze een absolute of relatieve maatstaf zijn.

Met de linkagemaatstaven afgeleid uit de modellen van Leontief en Ghosh kunnen de sleutelsectoren van een economie worden bepaald door de intensiteit van de voorwaartse en achterwaartse relaties tussen de verschillende bedrijfstakken onderling te vergelijken. In de literatuur worden verschillende linkagemaatstaven voorgesteld, gebaseerd op de elementen van de Leontief-inverse en de Ghosh-inverse en op de hypothetische extractiemethode (Hypothetical Extraction method).

De recente raming door het Federaal Planbureau van een coherente reeks van input-outputtabellen voor België tegen lopende en constante prijzen voor de jaren 1995, 2000 en 2005, zal het mogelijk maken alle multiplicator- en linkagemaatstaven, over een lange periode en zonder methodologische breuk, te berekenen. Voor het eerst zal het ook mogelijk zijn de evolutie over een periode van 10 jaar te analyseren van de multiplicatoren die voortvloeien uit een verandering van de finale vraag in volume.

Synthèse

Depuis 1994, le Bureau fédéral du Plan a dans ses attributions l'estimation des tableaux entrées-sorties quinquennaux pour la Belgique. Ces tableaux représentent un outil unique d'analyse des relations qui existent entre les différentes branches d'activité (homogènes) au sein de l'économie belge. Lorsqu'ils sont intégrés dans un modèle entrées-sorties, ils permettent de fournir rapidement différentes mesures synthétiques de ces relations.

Cette étude est consacrée à la présentation de deux applications classiques des modèles entrées-sorties, à savoir les multiplicateurs et les mesures de linkage. Elle poursuit un double objectif. Le premier est de revenir sur les fondements mêmes de l'analyse entrées-sorties, que sont les modèles entrées-sorties. Il s'agit d'expliciter les hypothèses sous-jacentes sur lesquelles reposent les différents modèles et les limites qu'elles engendrent, et d'insister sur l'importance du choix du modèle. Le second objectif poursuivi est de montrer que l'analyse entrées-sorties développée à la fin des années 30 par Leontief évolue constamment. Les mesures de linkage en particulier, ont connu des développements intéressants au cours des quinze dernières années.

Différents modèles entrées-sorties peuvent être dérivés du tableau entrées-sorties domestique. Ils se répartissent en deux catégories : d'une part, les modèles en quantité déterminés par la demande (demand-pull models), tels que le modèle traditionnel (ouvert) de Leontief et le modèle fermé par rapport à la consommation des ménages, et d'autre part, les modèles déterminés par les coûts (cost-push models), tels que le modèle de prix de Leontief et le modèle de Ghosh réinterprété comme un modèle de prix. Enfin, le modèle entrées-sorties mixte représente une extension du modèle traditionnel et permet de spécifier dans un même modèle, une production exogène pour une partie des produits et une demande finale exogène pour le restant des produits.

Largement utilisés dans les analyses d'impact économique, les multiplicateurs dérivés des modèles entrées-sorties représentent des mesures synthétiques de la réponse d'une économie à un choc exogène. Ils permettent, par exemple, d'estimer les effets d'une variation des exportations ou de l'existence de quotas, sur la production, la consommation énergétique ou les émissions polluantes des différentes branches de l'économie. Différents multiplicateurs existent dans la littérature, selon le modèle entrées-sorties dont ils découlent et selon qu'ils représentent une mesure absolue ou relative.

Les mesures de linkage dérivées des modèles de Leontief et de Ghosh, permettent de déterminer quelles sont les branches d'activité « clés » pour une économie, en comparant l'intensité des liens en amont et en aval que les différentes branches entretiennent entre elles. La littérature propose différentes mesures de linkage, basées sur les éléments des matrices inverses de Leontief et de Ghosh et sur la méthode d'extraction hypothétique (Hypothetical Extraction Method).

L'estimation récente par le Bureau fédéral du Plan d'une série cohérente de tableaux entrées-sorties à prix courants et à prix constants pour la Belgique pour les années 1995, 2000 et 2005, va permettre de calculer toutes ces mesures de multiplicateurs et de linkage, sur une longue période et sans rupture méthodologique. Il sera également possible pour la première fois, d'analyser l'évolution sur une période de 10 ans, des multiplicateurs résultant d'une variation de la demande finale en volume.

1. Inleiding

Sinds de hervorming van het Belgisch statistisch apparaat in 1994, is het Federaal Planbureau verantwoordelijk voor de raming van de input-outputtabellen voor België. Die input-outputtabellen zijn een uniek instrument om de relaties tussen de verschillende bedrijfstakken binnen een economie te analyseren. Wanneer de input-outputtabellen gekoppeld worden aan macro-economische modellen, kunnen ze daaraan structurele elementen toevoegen. Wanneer ze geïntegreerd worden in een input-outputmodel, geven zij snel verschillende synthetische analysemaatstaven. In deze paper worden twee klassieke toepassingen van input-outputmodellen voorgesteld, namelijk de multiplicatoren en de linkagemaatstaven.

Het doel van deze paper is tweevoudig. Allereerst komen we terug op de fundamenten zelf van de input-outputanalyse: de input-outputmodellen. De multiplicatoren en de linkagemaatstaven zijn het resultaat van de toepassing van specifieke economische modellen die gebaseerd zijn op welbepaalde hypothesen. Een keuze maken tussen die maatstaven betekent dus kiezen voor een model en de hypothesen aanvaarden die aan de basis ervan liggen. Het tweede doel bestaat erin aan te tonen dat de input-outputanalyse die eind de jaren 30 door Wassily Leontief werd ontwikkeld, constant evolueert. Vooral de linkagemaatstaven hebben de voorbije vijftien jaar een interessante evolutie gekend.

Deze paper omvat vier delen. Het eerste deel geeft een korte voorstelling van de input-outputtabellen en herneemt de fundamentele identiteiten die de verschillende delen van de binnenlandse input-outputtabellen met elkaar verbinden.

Het tweede deel levert een gedetailleerde beschrijving van vijf analytische modellen die gebaseerd zijn op de input-outputtabellen: het traditionele input-outputmodel van Leontief, het gesloten input-outputmodel met endogeen gezinsverbruik, het gemengd input-outputmodel, dat een uitbreiding vormt van het traditionele model en ten slotte de prijs-input-outputmodellen van Leontief en Ghosh. Door die voorstelling is het mogelijk de hypothesen te duiden die ten grondslag liggen aan die verschillende modellen, alsook hun beperkingen.

Het derde deel geeft de multiplicatoren die afgeleid zijn van de vraaggestuurde input-outputmodellen en van de gemengde input-outputmodellen. De multiplicatoren, die vaak worden toegepast in de economische impactanalyses, zijn synthetische maatstaven van de weerslag van exogene schokken op verschillende economische variabelen. Zij kunnen dus gebruikt worden om de effecten te ramen van een verandering van de overheidsuitgaven of van het bestaan van quota, op de productie, het energieverbruik of de werkgelegenheid in de verschillende bedrijfstakken. Er is echter voorzichtigheid geboden aangaande het automatisch gebruik van de multiplicatoren. Elk geval moet individueel worden onderzocht om het input-outputmodel te kiezen dat het meest geschikt is om de betrokken situatie correct in te schatten.

Het laatste deel handelt over de linkagemaatstaven die afgeleid zijn uit de input-outputmodellen. Het economisch belang van een bedrijfstak wordt bepaald door de intensiteit van de stroomopwaartse en stroomafwaartse relaties met de andere bedrijfstakken te meten. Door die intensiteit te vergelijken, kan men de 'sleutelsectoren' van een economie identificeren, met name de bedrijfstakken die, door hun verwevenheid met de rest van de economie, het grootste potentieel hebben om economische schokken binnen de economie te verspreiden. De verschillende linkagemaatstaven die in de literatuur worden voorgesteld, berusten op twee methodes die hun oorsprong vinden in de input-outputmodellen van Leontief en Ghosh. Zij werden vaak gebruikt als planninginstrument in de ontwikkelingseconomie en de regionale economie.

2. De input-outputtabel

Het Europees Systeem van Rekeningen (ESR 1995) definieert een input-outputtabel als 'een matrix waarin, gespecificeerd naar productgroep of naar bedrijfstak, een gedetailleerde beschrijving wordt gegeven van de binnenlandse productieprocessen en de transacties in producten van de nationale economie' (ESR, 9.09). Hij bestaat uit drie matrices:

- de matrix van de intermediaire leveringen, die de kern vormt van de input-outputtabel: ze heeft de vorm van een vierkante tabel, product x product, en bevat alle productstromen die ofwel getransformeerd ofwel volledig gebruikt worden tijdens het productieproces;
- de matrix van de finale bestedingen: ze omvat per product de finale consumptieve bestedingen van de gezinnen, de overheid en de instellingen zonder winstoogmerk ten dienste van de gezinnen, de bruto-investeringen in vaste activa, de voorraadschommelingen en de uitvoer;
- de matrix van de primaire inputs: ze geeft de componenten van de toegevoegde waarde per product (lonen van de werknemers, netto-exploitatieoverschot, belastingen minus subsidies op de productie, verbruik van vaste activa) plus de belastingen minus subsidies op het intermediair verbruik.

Wanneer men de totale impact raamt van een exogene schok op de economie, is men geïnteresseerd in de directe en indirecte effecten ervan op het binnenlands productieapparaat. Daarom berusten de input-outputtabellen meer in het bijzonder op de **binnenlandse input-outputtabellen** (ook ‘input-outputtabellen van de binnenlandse productie’ genaamd). Het gaat om aanvullende tabellen die de bestemming van de goederen en diensten beschrijven *die in het land werden geproduceerd*. tabel 1 omvat een vereenvoudigd voorbeeld van een binnenlandse input-outputtabel.

Tabel 1 Vereenvoudigd voorbeeld van input-outputtabel van de binnenlandse productie
(product x product)

		Producten 1 2 … n	Σ	Finale bestedingen	**Totaal**
Producten	1 2 n	Intermediair verbruik uit binnenlandse productie (n x n)	Totaal (n x 1)	Finale bestedingen uit binnenlandse productie	**Totaal van de bestedingen uit binnenlandse productie = productie (n x 1)**
Σ		Totaal (1 x n)			
Primaire inputs		Toegevoegde waarde (1 x n)			
		Belastingen minus subsidies op het intermediair verbruik (1 x n)			
Invoer		Intermediaire invoer (1 x n)			
Totaal		**Productie (1 x n)**			

Voor elk product worden de volgende identiteiten nagegaan:

- Productie = Intermediair verbruik uit binnenlandse productie + finale bestedingen uit binnenlandse productie = Totale bestedingen uit binnenlandse productie (horizontale lezing);
- Productie = Intermediair verbruik uit binnenlandse productie + primaire inputs + intermediaire invoer = Totale productiekosten (verticale lezing).

De door het Federaal Planbureau berekende input-outputtabellen van België zijn "product x product" tabellen. De hier behandelde modellen berusten dus van nature op “product x product” tabellen en de multiplicatoren die eruit voortvloeien, moeten worden geïnterpreteerd in termen van producten. Wanneer hieronder de term 'bedrijfstak' wordt gebruikt, verwijst die naar een *homogene bedrijfstak*, met name een bedrijfstak die slechts één product of productgroep als output heeft.

3. Voorstelling van de verschillende modellen

3.1. De door de finale vraag bepaalde input-outputmodellen

Het klassieke input-outputmodel van Leontief en het gesloten input-outputmodel zijn **vraagmodellen** (demand-driven of demand-pull models). Zij steunen op de hypothese dat er in de economie geen productiebeperkingen bestaan zodat de productievector bepaald wordt door finale vraag gericht aan het binnenlands productieapparaat.

Die modellen zijn **kwantiteitsmodellen**. In de impactanalyses liggen de prijzen vast en het zijn de geproduceerde *hoeveelheden* die variëren als gevolg van een verandering van de finale vraag in *volume*.

3.1.1. Het klassieke input-outputmodel van Leontief

Het klassieke input-outputmodel van Leontief (1936) is een stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden, waarbij n staat voor het aantal producten in de input-outputtabel van de binnenlandse productie. Elke vergelijking geeft het evenwicht tussen de binnenlandse productie van een product i (x_i) en de intermediaire en finale vraag gericht aan die productie[1] ($\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^d$ en ${\bar{y}_i}^d$, respectievelijk)[2].

$$\begin{aligned} x_1 &= z_{11}^d + z_{12}^d + \cdots + z_{1n}^d + \bar{y}_1^d \\ &\vdots \\ x_i &= z_{i1}^d + z_{i2}^d + \cdots + z_{in}^d + \bar{y}_i^d \\ &\vdots \\ x_n &= z_{n1}^d + z_{n2}^d + \cdots + z_{nn}^d + \bar{y}_n^d \end{aligned}$$

In matrixvorm:

$$\mathrm{x} = \mathrm{Z}^{\mathrm{d}}\,\mathrm{i} + \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}$$

met $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, de vector van de binnenlandse productie, $\mathrm{Z}^{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} z_{11}^d & \cdots & z_{1n}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1}^d & \cdots & z_{nn}^d \end{bmatrix}$, de matrix van het intermediair verbruik uit binnenlandse productie, $\mathrm{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ van dimensie (n x 1), de sommatie-vector en $\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1^d \\ \vdots \\ \bar{y}_n^d \end{bmatrix}$, de vector van de finale vraag waaraan wordt voldaan door de binnenlandse productie.

Het klassieke model van Leontief steunt op de hypothese dat de intermediaire vraag van een bedrijfstak volledig, en volgens vaste verhoudingen, afhangt van zijn productieniveau. Die vaste relatie tussen de productie van een product en de intermediaire inputs die deel uitmaken van zijn

1 Of een horizontale lezing van de input-outputtabel van de binnenlandse productie.

2 De matrices worden voorgesteld met hoofdletters, de vectoren met kleine letters en de scalairen met schuingedrukte kleine letters. Een streepje boven een variabele duidt op een exogene variabele.

productieproces wordt voorgesteld door de **technische inputcoëfficiënten**. Die worden verkregen door elke kolom van de matrix van het intermediair verbruik te delen door de productie van de eraan gekoppelde bedrijfstak. Of $a_{ij}^d = z_{ij}^d / x_j$, waarin a_{ij}^d de hoeveelheid van product i aangeeft (afkomstig van binnenlandse output) die gebruikt wordt voor de productie van een eenheid product j [3].

Het model kan dus als volgt worden herschreven:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}^d\, x_1 + a_{12}^d\, x_2 + \cdots + a_{1n}^d\, x_n + \bar{y}_1^d \\
&\vdots \\
x_i &= a_{i1}^d\, x_1 + a_{i2}^d x_2 + \cdots + a_{in}^d\, x_n + \bar{y}_i^d \\
&\vdots \\
x_n &= a_{n1}^d\, x_1 + a_{n2}^d x_2 + \cdots + a_{nn}^d x_n + \bar{y}_n^d
\end{aligned}
$$

Indien men de matrix van de binnenlandse technische coëfficiënten bepaalt, $\mathrm{A^d} = \mathrm{Z^d}\, \hat{\mathrm{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^d & \cdots & a_{1n}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^d & \cdots & a_{nn}^d \end{bmatrix}$, met $\hat{\mathrm{x}}^{-1}$, de inverse matrix van de gediagonaliseerde vector x, kan het model als volgt worden herschreven:

$$\mathrm{x} = \mathrm{A^d}\, \mathrm{x} + \bar{\mathrm{y}}^\mathrm{d}$$

Traditioneel wordt de finale vraag beschouwd als exogeen aan het productieproces. Het model maakt het dan mogelijk de productievector te bepalen die nodig is om te beantwoorden aan een gegeven vector van finaal verbruik van binnenlandse output.

$$\mathrm{x} = (\mathrm{I} - \mathrm{A^d})^{-1}\, \bar{\mathrm{y}}^\mathrm{d} = \mathrm{L}\, \bar{\mathrm{y}}^\mathrm{d}$$

met $\mathrm{L} = (\mathrm{I} - \mathrm{A^d})^{-1}$, de Leontief-inverse.

De **Leontief-inverse** vertrekt van het einde van het productieproces: zij geeft het verband tussen het exogeen finaal verbruik van binnenlandse output van een bedrijfstak en de (endogene) output van de verschillende bedrijfstakken.

Het element l_{ij} van matrix L toont de binnenlandse output van het product i die direct of indirect nodig is per eenheid finaal verbruik uit binnenlandse output van product j. Miller en Blair (2009) geven de naam 'multiplicatoren' aan de elementen van deze matrix. De som van de elementen van de j[e] kolom van deze matrix geeft de output die gegenereerd wordt in de volledige economie per euro finaal verbruik van binnenlandse output van bedrijfstak j.

[3] De keuze van die sterke hypothese heeft tot gevolg dat de Leontief-productiefuncties constante schaalopbrengsten geven en geen substitutie tussen inputs mogelijk maken.

3.1.2. Het gesloten input-outputmodel met endogeen gezinsverbruik

Het klassieke model van Leontief wordt beschouwd als een open model: het berust op het bestaan van een finale vraag die exogeen is aan het productieproces. Bij de hypothese dat een deel of de totaliteit van de finale vraag endogeen is, moet er een gesloten input-outputmodel worden gebruikt.

Het meest voorkomende geval is het gesloten model met endogeen gezinsverbruik. De sector van de huishoudens wordt beschouwd als een bijkomende bedrijfstak (bedrijfstak n+1)[4]. Het verbruik van de gezinnen hangt dan af van het niveau van hun inkomen (ontvangen in ruil voor hun arbeid) dat zelf afhangt van het productieniveau van de verschillende bedrijfstakken. De matrix van het intermediair verbruik wordt uitgebreid met een rij ($z_{n+1,1}^d$ ... $z_{n+1,i}^d$ ... $z_{n+1,n}^d$), die staat voor de inkomens van de gezinnen in de verschillende bedrijfstakken in ruil voor hun arbeid, en met een kolom ($z_{1,n+1}^d$ ... $z_{i,n+1}^d$ ... $z_{n,n+1}^d$), die de finale bestedingen van de gezinnen voor de verschillende producten uit de binnenlandse productie omvat. Het element $z_{n+1,n+1}^d$ geeft de aankopen van arbeid door de gezinnen weer.

Het gesloten model met inbegrip van de gezinnen wordt als volgt geschreven:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= z_{11}^d + z_{12}^d + \cdots + z_{1n}^d + z_{1,n+1}^d + \bar{y}_1^{d*} \\
&\vdots \\
x_{\mathrm{i}} &= z_{i1}^d + z_{i2}^d + \cdots + z_{in}^d + z_{i,n+1}^d + \bar{y}_{\mathrm{i}}^{d*} \\
&\vdots \\
x_n &= z_{n1}^d + z_{n2}^d + \cdots + z_{nn}^d + z_{n,n+1}^d + \bar{y}_n^{d*} \\
x_{n+1} &= z_{n+1,1}^d + z_{n+1,2}^d + \cdots + z_{n+1,n}^d + z_{n+1,n+1}^d + \bar{y}_{n+1}^{d*}
\end{aligned}
$$

met $z_{i,n+1}^d$, de binnenlandse output van het product *i* die bestemd is voor gezinsverbruik, $\bar{y}_i^{d*}$, het nieuw exogeen finaal verbruik van binnenlandse output van product *i* (m.a.w. de finale vraag verminderd met het gezinsverbruik), x_{n+1}, de output van de huishoudsector (gelijk aan zijn inkomsten) en $z_{n+1,i}^d$, de inkomsten van de gezinnen afkomstig van de productiesector *i*. Het element $\bar{y}_{n+1}^{d*}$ omvat bijvoorbeeld de bezoldigingen van de gezinnen die tewerkgesteld zijn bij de overheid.

Het gesloten model herneemt de *hypothese* van vaste technische coëfficiënten en breidt die uit tot de nieuwe huishoudsector. De technische coëfficiënt $a_{n+1,j}^d = z_{n+1,j}^d / x_j$ geeft de waarde van de arbeid die gebruikt wordt voor de productie van een eenheid product *j*. De endogenisering van die bedrijfstak impliceert dat het consumptiegedrag van de gezinnen bepaald wordt door vaste consumptiecoëfficiënten die los staan van hun inkomensniveau ($a_{i,n+1}^d = z_{i,n+1}^d / x_{n+1}$).

[4] Het is mogelijk de huishoudsector op te splitsen in verschillende groepen van huishoudens, op basis van hun inkomensniveau of verschillende kenmerken (bijvoorbeeld werknemers of werklozen) (zie bijvoorbeeld, Miyazawa (1976)).

Het gesloten model wordt dus als volgt herschreven:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}^d x_1 + a_{12}^d x_2 + \cdots + a_{1n}^d x_n + a_{1,n+1}^d x_{n+1} + \bar{y}_1^{d*} \\
&\vdots \\
x_\mathrm{i} &= a_{i1}^d x_1 + a_{i2}^d x_2 + \cdots + a_{in}^d x_n + a_{i,n+1}^d x_{n+1} + \bar{y}_\mathrm{i}^{d*} \\
&\vdots \\
x_n &= a_{n1}^d x_1 + a_{n2}^d x_2 + \cdots + a_{nn}^d x_n + a_{n,n+1}^d x_{n+1} + \bar{y}_n^{d*} \\
x_{n+1} &= a_{n+1,1}^d x_1 + a_{n+1,2}^d x_2 + \cdots + a_{n+1,n}^d x_n + a_{n+1,n+1}^d x_{n+1} + \bar{y}_{n+1}^{d*}
\end{aligned}$$

In matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^d & \cdots & a_{1n}^d & a_{1,n+1}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^d & \cdots & a_{nn}^d & a_{n,n+1}^d \\ a_{n+1,1}^d & \cdots & a_{n+1,n}^d & a_{n+1,n+1}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{y}_1^{d*} \\ \vdots \\ \bar{y}_n^{d*} \\ \bar{y}_{n+1}^{d*} \end{bmatrix}$$

Via het gebruik van blokmatrices, kan dit stelsel van vergelijkingen herschreven worden waarbij de elementen van het klassieke Leontief-model tot uiting komen:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A^d} & \mathrm{h_C} \\ \mathrm{h_R} & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}*} \\ \bar{y}_{n+1}^{d*} \end{bmatrix}$$

met: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathrm{A^d} = \begin{bmatrix} a_{11}^d & \cdots & a_{1n}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^d & \cdots & a_{nn}^d \end{bmatrix}$ van dimensie (n x n), de matrix van binnenlandse technische coëfficiënten van het klassieke model, $\mathrm{h_C} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1}^d \\ \vdots \\ a_{n,n+1}^d \end{bmatrix}$ van dimensie (n x 1), de vector van binnenlandse coëfficiënten van het gezinsverbruik, $\mathrm{h_R} = \begin{bmatrix} a_{n+1,1}^d & \cdots & a_{n+1,n}^d \end{bmatrix}$ van dimensie (1 x n), de inzet van remuneratie van de gezinnen, $h = a_{n+1,n+1}^d$ en $\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}*} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1^{d*} \\ \vdots \\ \bar{y}_n^{d*} \end{bmatrix}$.

of

$$\breve{\mathrm{x}} = \breve{\mathrm{A}}\,\breve{\mathrm{x}} + \breve{\bar{\mathrm{y}}}$$

met: $\breve{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$, $\breve{\bar{\mathrm{y}}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}*} \\ \bar{y}_{n+1}^{d*} \end{bmatrix}$ en $\breve{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} \mathrm{A^d} & \mathrm{h_C} \\ \mathrm{h_R} & h \end{bmatrix}$

Dit gesloten input-outputmodel wordt opgelost door de productie en de aan de huishoudsector betaalde inkomens om die productie te realiseren uit te drukken in functie van de exogene variabelen, namelijk het finaal verbruik uit binnenlandse output minus het gezinsverbruik.

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} - \mathrm{A^d} & -\mathrm{h_C} \\ n\ x\ n & n\ x\ 1 \\ -\mathrm{h_R} & (1-h) \\ 1\ x\ n & 1\ x\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}*} \\ \bar{y}_{n+1}^{d*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \breve{\mathrm{L}}_{11} & \breve{\mathrm{L}}_{12} \\ n\ x\ n & n\ x\ 1 \\ \breve{\mathrm{L}}_{21} & \breve{\mathrm{L}}_{22} \\ 1\ x\ n & 1\ x\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}*} \\ \bar{y}_{n+1}^{d*} \end{bmatrix}$$

of

$$\breve{\mathrm{x}} = (\mathrm{I} - \breve{\mathrm{A}})^{-1}\,\breve{\bar{\mathrm{y}}} = \breve{\mathrm{L}}\,\breve{\bar{\mathrm{y}}}$$

De elementen van de uitgebreide inverse matrix geven de relatie weer die bestaat tussen het exogeen finaal verbruik (m.a.w. de finale vraag minus het gezinsverbruik) uit binnenlandse output van een bedrijfstak en de (endogene) productie van alle bedrijfstakken en de (endogene) inkomens die aan de huishoudsector worden betaald om die output te realiseren.

3.2. De gemengde input-outputmodellen

Er bestaan input-outputmodellen, "gemengde input-outputmodellen" genaamd, die het mogelijk maken in eenzelfde model een exogene productie te specificeren voor een deel van de producten en een exogene finale vraag voor de rest van de producten. Het interessante van die modellen is dat zij, in eenzelfde model, de formulering van verschillende onderling consistente hypothesen inzake exogeniteit/endogeniteit mogelijk maken. Indien men bijvoorbeeld wil nagaan wat de impact is van een productieverandering in verschillende bedrijfstakken op de totale productie van de economie, kan enkel via het beschouwen van die verschillende exogene producties in eenzelfde model worden gegarandeerd dat de productie van elk van de bedrijfstakken niet gestimuleerd zal worden door de productie van de andere bedrijfstakken.

In de door de finale vraag bepaalde modellen kent de productie geen beperking en wordt zij bepaald door de exogene finale vraag. De productie van een economie kan echter ook worden gestimuleerd – of omgekeerd, ingeperkt – door de productie van een of meer bedrijfstakken. Die productie leidt tot een bijkomende vraag naar intermediaire inputs bij de toeleveranciers van die bedrijfstakken, wat op zijn beurt een bijkomende productie in de andere toeleverende bedrijfstakken veroorzaakt... In dergelijk geval is het dus de productie die wordt gegeven en niet de finale vraag.

In de literatuur werden de gemengde input-outputmodellen vooral gebruikt in analyses met betrekking tot aanbodbeperkingen, in de primaire sector (landbouw, visvangst, bosbouw, mijnen). Koller en Luptacik (2007) stellen voor die modellen te gebruiken om de directe, indirecte en geïnduceerde effecten van de productie van een bedrijfstak op de rest van de economie te onderzoeken. 'The research question of measuring the importance of a sector or industry provides enough justification to view the production of the sector as exogenous' (Koller and Luptacik (2007, p.2)). Zo hebben ze het belang gemeten van de productie en de investeringen van de landbouwsector voor de Oostenrijkse economie.

Laten we een economie beschouwen met n bedrijfstakken. Voor de eerste k bedrijfstakken, is de exogene variabele de finale vraag (open model). Voor de resterende (n-k) bedrijfstakken, is de productie exogeen. Er bestaan verschillende manieren om een dergelijke economie te modelleren.

3.2.1. Herschikken van de vergelijkingen van het klassieke model

Deze specificatie is gebaseerd op de gelijkheden van het (open) klassieke model van Leontief (n vergelijkingen met n onbekenden) waarvan de bedrijfstakken werden herschikt zodat de eerste k bedrijfstakken een exogene finale vraag $[\bar{y}_1^d \quad \cdots \quad \bar{y}_k^d]$ en een endogene productie $[x_1 \quad \cdots \quad x_k]$ hebben en dat de (n-k) laatste bedrijfstakken een exogene productie $[\bar{x}_{k+1} \quad \cdots \quad \bar{x}_n]$ en een endogene finale vraag hebben $[y_{k+1}^d \quad \cdots \quad y_n^d]$.

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad &= a^d_{11}x_1 + a^d_{12}x_2 + \cdots + a^d_{1k}x_k + a^d_{1,k+1}\bar{x}_{k+1} + \cdots + a^d_{1n}\bar{x}_n + \bar{y}^d_1 \\
&\vdots \\
x_k \quad &= a^d_{k1}x_1 + a^d_{k2}x_2 + \cdots + a^d_{kk}x_k + a^d_{k,k+1}\bar{x}_{k+1} + \cdots + a^d_{kn}\bar{x}_n + \bar{y}^d_k \\
\bar{x}_{k+1} &= a^d_{k+1,1}x_1 + a^d_{k+1,2}x_2 + \cdots + a^d_{k+1,k}x_k + a^d_{k+1,k+1}\bar{x}_{k+1} + \cdots + a^d_{k+1,n}\bar{x}_n + y^d_{k+1} \\
&\vdots \\
\bar{x}_n \quad &= a^d_{n1}x_1 + a^d_{n2}x_2 + \cdots + a^d_{nk}x_k + a^d_{n,k+1}\bar{x}_{k+1} + \cdots + a^d_{nn}\bar{x}_n + y^d_n
\end{aligned}
$$

Die vergelijkingen worden vervolgens herschikt zodat alle exogene variabelen zich rechts van het gelijkheidsteken bevinden en alle endogene variabelen links :

$$
\begin{aligned}
&(1 - a^d_{11})x_1 - a^d_{12}x_2 - \cdots - a^d_{1k}x_k \;=\; \bar{y}^d_1 + a^d_{1,k+1}\bar{x}_{k+1} + \cdots + a^d_{1n}\bar{x}_n \\
&\vdots \\
&-a^d_{k1}x_1 - a^d_{k2}x_2 - \cdots + (1 - a^d_{kk})x_k \;=\bar{y}^d_k + a^d_{k,k+1}\bar{x}_{k+1} + \cdots + a^d_{kn}\bar{x}_n \\
&-a^d_{k+1,1}x_1 - a^d_{k+1,2}x_2 - \cdots - a^d_{k+1,k}x_k - y^d_{k+1} \;= -(1 - a^d_{k+1,k+1})\bar{x}_{k+1} + \cdots + a^d_{k+1,n}\bar{x}_n \\
&\vdots \\
&-a^d_{n1}x_1 - a^d_{n2}x_2 - \cdots - a^d_{nk}x_k - y^d_n = a^d_{n,k+1}\bar{x}_{k+1} + \cdots - (1 - a^d_{nn})\bar{x}_n
\end{aligned}
$$

In matrixvorm:

$$
\begin{bmatrix}
(1 - a^d_{11}) & \cdots & -a^d_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a^d_{k1} & \cdots & (1 - a^d_{kk}) & 0 & \cdots & 0 \\
-a^d_{k+1,1} & \cdots & -a^d_{k+1,k} & -1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a^d_{n1} & \cdots & -a^d_{nk} & 0 & \cdots & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ y^d_{k+1} \\ \vdots \\ y^d_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & \cdots & 0 & a^d_{1,k+1} & \cdots & a^d_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & a^d_{k,k+1} & \cdots & a^d_{kn} \\
0 & \cdots & 0 & -(1 - a^d_{k+1,k+1}) & \cdots & a^d_{k+1,n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a^d_{n,k+1} & \cdots & -(1 - a^d_{nn})
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \bar{y}^d_1 \\ \vdots \\ \bar{y}^d_k \\ \bar{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}
$$

Door de matrices

$$
\mathrm{M} = \begin{bmatrix}
(1 - a^d_{11}) & \cdots & -a^d_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a^d_{k1} & \cdots & (1 - a^d_{kk}) & 0 & \cdots & 0 \\
-a^d_{k+1,1} & \cdots & -a^d_{k+1,k} & -1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a^d_{n1} & \cdots & -a^d_{nk} & 0 & \cdots & -1
\end{bmatrix},\ \mathrm{N} =
\begin{bmatrix}
1 & \cdots & 0 & a^d_{1,k+1} & \cdots & a^d_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & a^d_{k,k+1} & \cdots & a^d_{kn} \\
0 & \cdots & 0 & -(1 - a^d_{k+1,k+1}) & \cdots & a^d_{k+1,n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a^d_{n,k+1} & \cdots & -(1 - a^d_{nn})
\end{bmatrix},
$$

$\mathrm{x}_{\mathrm{Mixed}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ y^d_{k+1} \\ \vdots \\ y^d_n \end{bmatrix}$ en $\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}} = \begin{bmatrix} \bar{y}^d_1 \\ \vdots \\ \bar{y}^d_k \\ \bar{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$ te definiëren, kan het model herschreven worden: $\mathrm{M}\,\mathrm{x}_{\mathrm{Mixed}} = \mathrm{N}\,\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}}$

Dit stelsel van vergelijkingen wordt opgelost door de endogene variabelen uit te drukken in functie van de exogene variabelen:

$$
\mathrm{x}_{\mathrm{Mixed}} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{N}\,\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}}
$$

De elementen van de matrix $\mathrm{M}^{-1}\mathrm{N}$ zijn in zekere zin multiplicatoren die de endogene variabelen en de exogene variabelen met elkaar verbinden.

Door gebruik te maken van de matrix van de binnenlandse technische coëfficiënten van het klassieke Leontief-model $\mathrm{A^d}$ en door die als volgt te partitioneren:

$$\mathrm{A^d} = \begin{bmatrix} \mathrm{A^d_{11}} & \mathrm{A^d_{12}} \\ k\ x\ k & k\ x\ (n-k) \\ \mathrm{A^d_{21}} & \mathrm{A^d_{22}} \\ (n-k)\ x\ k & (n-k)\ x\ (n-k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^d_{11} & \cdots & a^d_{1k} & a^d_{1,k+1} & \cdots & a^d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^d_{k1} & \cdots & a^d_{kk} & a^d_{k,k+1} & \cdots & a^d_{kn} \\ a^d_{k+1,1} & \cdots & a^d_{k+1,k} & a^d_{k+1,k+1} & \cdots & a^d_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^d_{n1} & \cdots & a^d_{nk} & a^d_{n,k+1} & \cdots & a^d_{nn} \end{bmatrix},$$

kunnen we de matrices M en N herschrijven:

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} (\mathrm{I}-\mathrm{A^d_{11}}) & 0 \\ -\mathrm{A^d_{21}} & -\mathrm{I} \end{bmatrix} \text{ en } \mathrm{N} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{A^d_{12}} \\ 0 & -(\mathrm{I}-\mathrm{A^d_{22}}) \end{bmatrix}$$

We kunnen op die manier de inverse matrix van M berekenen door gebruik te maken van de

eigenschappen van de inverse van de blokmatrices, namelijk $\mathrm{M^{-1}} = \begin{bmatrix} (\mathrm{I}-\mathrm{A^d_{11}})^{-1} & 0 \\ -\mathrm{A^d_{21}}(\mathrm{I}-\mathrm{A^d_{11}})^{-1} & -\mathrm{I} \end{bmatrix}$

Het stelsel van vergelijkingen $\mathrm{x}_{\mathrm{Mixed}} = \mathrm{M^{-1}N}\,\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}}$ kan dan als volgt worden herschreven:

$$\begin{bmatrix} (\mathrm{I}-\mathrm{A^d_{11}}) & 0 \\ -\mathrm{A^d_{21}} & -\mathrm{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y^d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{A^d_{12}} \\ 0 & -(\mathrm{I}-\mathrm{A^d_{22}}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} \\ \bar{\mathrm{x}} \end{bmatrix} \text{, met } \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y^d} \end{bmatrix} = \mathrm{x_{Mixed}} \text{ en } \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} \\ \bar{\mathrm{x}} \end{bmatrix} = \bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}}$$

Het heeft als **oplossing**:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y^d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{L}^k & \mathrm{L}^k\mathrm{A^d_{12}} \\ k\ x\ k & k\ x\ (n-k) \\ -\mathrm{A^d_{21}}\mathrm{L}^k & (\mathrm{I}-\mathrm{A^d_{22}}) - \mathrm{A^d_{21}}\mathrm{L}^k\mathrm{A^d_{12}} \\ (n-k)x\ k & (n-k)\ x\ (n-k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} \\ \bar{\mathrm{x}} \end{bmatrix} \text{, met } \mathrm{L}^k = (\mathrm{I}-\mathrm{A^d_{11}})^{-1}$$

De oplossing van dit model berust op de berekening van een in dimensie beperkte (k x k) inverse matrix. In het rechterdeel bovenaan drukt de matrix ($\mathrm{L}^k\mathrm{A^d_{12}}$) het verband uit tussen de exogene productie en de endogene productie.

- De **endogene productie** is gelijk aan $\mathrm{x} = \mathrm{L}^k\,\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} + \mathrm{L}^k\ \mathrm{A^d_{12}}\,\bar{\mathrm{x}} = \mathrm{L}^k\,(\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} + \mathrm{A^d_{12}}\bar{\mathrm{x}})$. Voor een vastgestelde exogene productie ($\bar{\mathrm{x}}$), vormt de vector $\mathrm{A^d_{12}}\bar{\mathrm{x}}$ in zekere zin een bijkomende exogene vraag aan de de productie van de bedrijfstakken 1 tot k.
- De **endogene finale vraag** is gelijk aan $\mathrm{y^d} = -\mathrm{A^d_{21}}\,\mathrm{L}^k\,\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} + \left((\mathrm{I}-\mathrm{A^d_{22}}) - \mathrm{A^d_{21}}\mathrm{L}^k\mathrm{A^d_{12}}\right)\bar{\mathrm{x}} = (\mathrm{I}-\mathrm{A^d_{22}})\,\bar{\mathrm{x}} - \mathrm{A^d_{21}}\mathrm{x}$.

Bijzondere gevallen

1. Indien men uitgaat van de extreme hypothese dat er geen exogene productie is ($\bar{x} = 0$), verandert het gemengde input-outputmodel in een klassiek vraaggestuurd input-outputmodel ($L^k = L$, en y^d, A_{12}^d, A_{21}^d en A_{22}^d bestaan dan niet).
2. Indien me eerder redeneert in termen van verandering met de hypothese dat enkel de exogene productie varieert ($\Delta\bar{y}^d = 0$, voor de producten 1 tot k en $\Delta\bar{x} \neq 0$, voor de producten k+1 tot n), dan is:
   - de verandering van de endogene productie (van de eerste k producten) gelijk aan:

   $$\Delta x = L^k A_{12}^d \Delta\bar{x}$$

   $A_{12}^d \Delta\,\bar{x}$ zet de bijkomende exogene productie van de producten k+1 tot n om in een aan de bedrijfstakken 1 tot k gerichte bijkomende vraag naar intermediaire inputs en de inverse matrix van het model die beperkt is tot de eerste k producten (L^k) zet die vraag om in een totale productie; $L^k A_{12}^d \Delta\,\bar{x}$ vertegenwoordigt de totale endogene productie van producten 1 tot k die rechtstreeks en onrechtstreeks nodig is om te voldoen aan de exogene bijkomende productie van producten van de bedrijfstakken k+1 tot n.

   - de verandering van de endogene finale vraag van de producten k+1 tot n gelijk aan:

   $$\Delta y^d = \left(I - A_{22}^d\right)\Delta\bar{x} - A_{21}^d L^k A_{12}^d\,\Delta\bar{x} = \left(I - A_{22}^d\right)\Delta\bar{x} - A_{21}^d \Delta x$$

   $\left(I - A_{22}^d\right)\Delta\bar{x}$ staat voor de bijkomende productie van producten k+1 tot n die beschikbaar is voor de finale vraag, na aftrek van de intermediaire leveringen aan de bedrijfstakken k+1 tot n; $A_{21}^d L^k A_{12}^d \Delta\bar{x}$ is gelijk aan de bijkomende intermediaire vraag aan de bedrijfstakken k+1 tot n door de bedrijfstakken 1 tot k, om te beantwoorden aan de toename van hun productie (Δx). Aangezien de verandering van de productie van de bedrijfstakken k+1 tot n vastligt, moet deze bijkomende vraag worden afgetrokken van wat anders beschikbaar was geweest voor de finale vraag. Voor een gegeven verandering van de exogene productie en van de exogene finale vraag ($\Delta\bar{x}$ en $\Delta\bar{y}^d$), is het perfect mogelijk dat het model slechts kan worden opgelost ten koste van een vermindering van de endogene finale vraag.

3.2.2. Uitsluiten van de bedrijfstakken waarvan de productie exogeen is

Koller en Luptacik (2007) stellen een alternatieve formulering voor van het gemengde model, «the one-sided mixed variables model ». Zoals de naam aangeeft, heeft het model slechts één gemengde vector, die aan de rechterkant. Die wordt verkregen door de matrix A^d van de binnenlandse technische coëfficiënten te wijzigen, door de rijen van coëfficiënten die behoren tot de bedrijfstakken waarvan de productie exogeen is te vervangen door nullen (laatste (n-k) rijen). Die wijziging van de matrix van de binnenlandse technische coëfficiënten waarborgt dat de (exogene) productie van de bedrijfstakken k+1 tot n niet gestimuleerd zal worden door de andere bedrijfstakken.

Of

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad &= a_{11}^d x_1 + \cdots + a_{1k}^d x_k + a_{1,k+1}^d \bar{x}_{k+1} + \cdots + a_{1n}^d \bar{x}_n + \bar{y}_1^d \\
&\vdots \\
x_k \quad &= a_{k1}^d x_1 + \cdots + a_{kk}^d x_k + a_{k,k+1}^d \bar{x}_{k+1} + \cdots + a_{kn}^d \bar{x}_n + \bar{y}_k^d \\
x_{k+1} &= \bar{x}_{k+1} \\
&\vdots \\
x_n &= \bar{x}_n
\end{aligned}
$$

In matrixvorm:

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^d & \cdots & a_{1k}^d & a_{1,k+1}^d & \cdots & a_{1n}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}^d & \cdots & a_{kk}^d & a_{k,k+1}^d & \cdots & a_{kn}^d \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{y}_1^d \\ \vdots \\ \bar{y}_k^d \\ \bar{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}
$$

Door volgende matrices te definiëren

$$
\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{x} \end{bmatrix}, \ \tilde{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} a_{11}^d & \cdots & a_{1k}^d & a_{1,k+1}^d & \cdots & a_{1n}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}^d & \cdots & a_{kk}^d & a_{k,k+1}^d & \cdots & a_{kn}^d \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}^{\mathrm{d}} & \mathrm{A}_{12}^{\mathrm{d}} \\ (k \ x \ k) & k \ x \ (n-k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\text{en } \bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1^d \\ \vdots \\ \bar{y}_k^d \\ \bar{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} \\ \bar{\mathrm{x}} \end{bmatrix}
$$

kan het model als volgt herschreven worden $\mathrm{x} = \tilde{\mathrm{A}}\, \mathrm{x} + \bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}}$

Het model wordt opgelost in twee fasen.

– In een eerste fase wordt de productievector bepaald in functie van de exogene variabelen.

$$
\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{L}^k & \mathrm{L}^k \, \mathrm{A}_{12}^{\mathrm{d}} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} \\ \bar{\mathrm{x}} \end{bmatrix}
$$

of

$$
\mathrm{x} = \left(\mathrm{I} - \tilde{\mathrm{A}}\right)^{-1} \bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}} = \tilde{\mathrm{L}}^n \, \bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}}
$$

met $\tilde{\mathrm{L}}^n = \left(\mathrm{I} - \tilde{\mathrm{A}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{L}^k & \mathrm{L}^k \, \mathrm{A}_{12}^{\mathrm{d}} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}$, van dimensie (n x n).

– In een tweede fase wordt de endogene finale vraag $[y_{k+1} \quad \cdots \quad y_n]$ verkregen door de oplossing van het gemengde model in te voeren in het stelsel van vergelijkingen: $\mathrm{y} = (\mathrm{I} - \mathrm{A}^{\mathrm{d}})\, \mathrm{x}$.

De twee alternatieve formuleringen uit punt 3.2.1 en 3.2.2 hierboven geven dezelfde resultaten en zijn geldig ongeacht het aantal branches waarvoor de output exogeen is.

3.3. De kostengestuurde input-outputmodellen

Het prijs-input-outputmodel van Leontief en het prijs-input-outputmodel van Ghosh zijn **kostengestuurde modellen** (cost-push models). In die modellen is het niet de finale vraag maar wel de met de intermediaire invoer vermeerderde primaire inputs die de exogene variabelen zijn en de productie bepalen.

Die modellen zijn **prijsmodellen.** Bij gebruik van die modellen voor impactanalyses liggen alle hoeveelheden vast en het zijn de *prijzen* van de productie die variëren als gevolg van een verandering van de *prijzen* van de met de intermediaire invoer vermeerderde primaire inputs.

3.3.1. Het prijs-input-outputmodel van Leontief

Het Leontief prijs-input-outputmodel steunt op een verticale lezing van de input-outputtabel van de binnenlandse productie. Elke vergelijking van dit model geeft het evenwicht tussen de waarde van de binnenlandse productie van een product i en de waarde van de intermediaire en primaire inputs die deel uitmaken van deze productie.

$$x' = i'Z^d + \tilde{v}'$$

waarin x' de productievector is (dimensie (1 x n)), Z^d de matrix van het binnenlands intermediair verbruik (dimensie (n x n)), i' de sommatievector (dimensie (1 x n) en $\tilde{v}'$ de vector van de met de intermediaire invoer vermeerderde primaire inputs (dimensie 1 x n)).

De introductie van de Leontief-hypothese van vaste technische inputcoëfficiënten laat toe Z^d te vervangen door $A^d\,\hat{x}$ en het model te herschrijven:

$$x' = i'A^d\,\hat{x} + \tilde{v}'$$

Door die gelijkheid daarna te vermenigvuldigen met $\hat{x}^{-1}$ verkrijgt men de prijs van elk product per euro productie. Hij is gelijk aan de som van de primaire en intermediaire kosten om 1 euro product te produceren. Voor het basisjaar is hij uiteraard gelijk aan 1.

$$i' = i'A^d + \tilde{v}_c'$$

Met $\tilde{v}_c' = \tilde{v}'\hat{x}^{-1}$, de vector van de met de intermediaire invoer vermeerderde primaire inputcoëfficiënten, per euro productie.

Indien men de vector van de indexprijzen van het basisjaar aanduidt met $(p^0)'$, wordt het Leontief prijs-input-outputmodel: $(p^0)' = (p^0)'A^d + (\tilde{v}_c^0)'$

Dit model wordt opgelost door de prijsindexen van de productie uit te drukken in functie van de kosten van de primaire inputs per eenheid product:

$$(p^0)' = (\tilde{v}_c^0)' \left(I - A^d\right)^{-1} = (\tilde{v}_c^0)' L^0$$

In het basisjaar, $(p^0)' = (\tilde{v}_c^0)' L^0 = i'$.

Het prijsmodel van Leontief wordt meestal gebruikt om de relatieve impact te meten van een kostenverandering van de met de intermediaire invoer vermeerderde primaire inputs op de prijzen van een economie.

Zij $(\tilde{v}^1)' = (\tilde{v}^0)' + (\Delta\tilde{v})'$, de vector van de nieuwe kosten van de met de intermediaire invoer vermeerderde primaire inputs. De oplossing van het prijsmodel van Leontief laat dan toe de nieuwe prijsindex van de productie (p^1) te ramen die overeenkomt met die nieuwe vector:

$$(p^1)' = (\tilde{v}_c^1)' L^0 \quad \text{, met } (\tilde{v}_c^1)' = (\tilde{v}^1)' (\hat{x}^0)^{-1}$$

Aangezien $(p^0)' = i'$, geeft $(p^1)'$ de verandering weer van de relatieve prijzen die volgt op een relatieve verandering van de kosten van de met de intermediaire invoer vermeerderde primaire inputs $(\tilde{v}^1/\tilde{v}^0)$.

Het **prijs-input-outputmodel van Leontief** wordt beschouwd als 'duaal' model van het **kwantiteit-input-outputmodel van Leontief**. Die term wordt gebruikt om aan te geven dat het ene model toelaat prijzen te bepalen (waarbij de hoeveelheden vastliggen), terwijl het andere model dient om hoeveelheden te bepalen (waarbij de prijzen vastliggen), terwijl de Leontief-hypothese inzake de vastheid van de inputcoëfficiënten gemeenschappelijk blijft.

3.3.2. Het input-outputmodel van Ghosh

Het input-outputmodel van Ghosh (1958) steunt op dezelfde boekhoudkundige vergelijkingen als het Leontief-prijsmodel (of een verticale lezing van de input-outputtabel van de binnenlandse productie, in waarde).

$$x' = i'Z^d + \tilde{v}' \qquad \text{of} \qquad x = Z^{d\prime}\, i + \tilde{v}$$

waarin x' de productievector is (dimensie (1 x n)), Z^d de matrix van het binnenlands intermediair verbruik (dimensie (n x n)), i' de sommatievector (dimensie (1 x n)) en $\tilde{v}'$ de vector van de met de intermediaire invoer vermeerderde primaire inputs (dimensie 1 x n)).

Kenmerkend voor het Gosh-model ten opzichte van het Leontief-model is het feit dat het gebaseerd is op de hypothese dat er een vaste relatie bestaat tussen de productie van een product en het gebruik van dat product door de verschillende bedrijfstakken in hun productieproces. Die relatie wordt weergegeven door de **outputcoëfficiënten** of **allocatiecoëfficiënten** [5]**.** Die worden verkregen door elke

[5] Ghosh situeert zijn model in het kader van een planningseconomie waarin de productie beperkt wordt door beperkte middelen. 'In economies of rationing since every sector registers a high demand for the scarce factors the general tendency of the rationing authorities is not to change the relative shares of each sector in the short run since such relative shares are determined by a delicate balancing of different sectors' claims and counter-claims. This tendency considered from the problem of projection makes the allocation coefficient more stable in the short run than production coefficients', Ghosh (1958, p.60).

rij van de matrix van de binnenlandse intermediaire leveringen te delen door de productie van het product dat verband houdt met die rij. Of $b_{ij}^d = z_{ij}^d / x_i$, waar b_{ij}^d het aandeel voorstelt van de productie van het product i dat aangewend wordt in het productieproces van het product j en $\mathrm{B^d} = \hat{\mathrm{x}}^{-1}\mathrm{Z^d}$, de matrix van de allocatiecoëfficiënten [6].

Het model kan dan als volgt worden herschreven:

$$\mathrm{x}' = \mathrm{x}'\mathrm{B^d} + \tilde{\mathrm{v}}' \qquad \text{of} \qquad \mathrm{x} = \mathrm{B^{d\prime}}\,\mathrm{x} + \tilde{\mathrm{v}}$$

Het model maakt het dan mogelijk de productievector te bepalen die nodig is om te beantwoorden aan een gegeven vector van primaire inputs vermeerderd met de intermediaire invoer.

$$\mathrm{x}' = \tilde{\mathrm{v}}'(\mathrm{I} - \mathrm{B^d})^{-1} = \tilde{\mathrm{v}}'\mathrm{G} \qquad \text{of} \qquad \mathrm{x} = (\mathrm{I} - \mathrm{B^{d\prime}})^{-1}\tilde{\mathrm{v}} = \mathrm{G}'\,\tilde{\mathrm{v}}$$

met $\mathrm{G} = (\mathrm{I} - \mathrm{B^d})^{-1}$, de Ghosh-inverse en $\mathrm{G}' = (\mathrm{I} - \mathrm{B^{d\prime}})^{-1}$.

De **Ghosh-inverse** vertrekt van het begin van het productieproces: zij geeft het verband tussen de primaire inputs (vermeerderd met de intermediaire invoer) die deel uitmaken van het productieproces en de output van de verschillende bedrijfstakken.

Oorspronkelijk werd het Ghosh-model voorgesteld als een kwantiteitsmodel, dat werd bepaald door het aanbod (supply-driven quantity model). Met dat model kon de impact worden gemeten van een verandering in beschikbaarheid van een primaire input in een gegeven bedrijfstak op de productie van de gezamenlijke economie. De redenering was als volgt: de beschikbaarheid van een primaire input in een specifieke bedrijfstak bepaalt het productieniveau van die bedrijfstak en bijgevolg het productieniveau van de bedrijfstakken die dit product gebruiken als input voor hun eigen productie. In die context meet *het element* g_{ij} *van de matrix G* de productiewaarde van bedrijfstak j per eenheid van primaire inputs (vermeerderd met de intermediaire invoer) van bedrijfstak i.

Vanaf het begin van de jaren 80 ontstond er heel wat voorbehoud ten aanzien van het Ghosh-model: gebrek aan realisme van de hypothese van vaste allocatiecoëfficiënten, ongeloofwaardigheid van een model waarin de verandering van de primaire inputs van een bedrijfstak leidt tot een verandering in productie van alle bedrijfstakken, die niet gepaard gaat met een verandering van de primaire inputs van de andere bedrijfstakken (Oosterhaven, 1988).

In 1997 toont Dietzenbacher dat de toepassing van het Ghosh-model in de impactanalyses gelijke resultaten geeft als het prijsmodel van Leontief. Daarom suggereert hij het Ghosh-model te herinterpreteren als een **prijsmodel** dat de impact geeft van een exogene prijsschommeling van de primaire inputs op de prijzen van een economie (**cost-push input-output price model**). In dat geval liggen alle hoeveelheden vast (zowel de productie als de intermediaire en primaire inputs) en wordt de prijsschommeling van de primaire inputs door de producent volledig doorberekend in de prijzen van zijn producten die zelf worden gebruikt voor de productie van andere producten, waarvan de prijzen navenant zullen worden aangepast...

[6] $b_{jj}^d = a_{jj}^d, \forall j$.

Om dit te illustreren nemen we de productievector in waarde in de beginsituatie [7]. Hij wordt bepaald in functie van de kosten van de primaire inputs en de intermediaire invoer:

$$(\mathrm{x}^0)' = (\tilde{\mathrm{v}}^0)'(\mathrm{I} - \mathrm{B}^{\mathrm{d}})^{-1} = (\tilde{\mathrm{v}}^0)'\mathrm{G}^0$$

Zij $(\Delta\tilde{\mathrm{v}})$, de exogene verandering van de kosten van de met de intermediaire invoer vermeerderde primaire inputs (veroorzaakt door een prijsverandering van deze laatste, terwijl de hoeveelheden vast zijn). De waarde van de nieuwe productie is dan gelijk aan:

$$(\mathrm{x}^1)' = (\tilde{\mathrm{v}}^1)'\mathrm{G}^0$$

met $(\tilde{\mathrm{v}}^1)' = (\tilde{\mathrm{v}}^0)' + (\Delta\tilde{\mathrm{v}})'$, de nieuwe kosten van de primaire inputs.

Aangezien alle hoeveelheden vastliggen, wordt de relatieve schommeling van de productieprijzen verkregen door vector $(\hat{\mathrm{x}}^0)^{-1}$ (x^1) te nemen.

Het verschil tussen het prijs-input-outputmodel van Leontief en het prijsmodel van Ghosh is dat het eerste rechtstreeks de resultaten geeft in termen van relatieve prijswijzigingen, terwijl het prijsmodel van Ghosh die geeft in termen van waarde van de nieuwe productie, waarvan de relatieve prijswijzigingen kunnen worden afgeleid als de ratio van de nieuwe productie tot de oorspronkelijke productie.

Het interessante van het prijsmodel van Ghosh is dat het eenvoudiger te berekenen (geen omzetting nodig in indexen en nadien in waarden) en te interpreteren is. *Het element g_{ij} van matrix G* meet de toename van de *waarde* van de productie van bedrijfstak j, volgend op een verandering van de prijzen, die rechtstreeks en onrechtstreeks resulteren uit een unitaire *prijs*verhoging van de primaire inputs vermeerderd met de intermediaire invoer van bedrijfstak i. De rijsom (over alle kolommen) van de elementen van matrix G meet het rechtstreekse en onrechtstreekse effect van een unitaire prijsverhoging van de primaire inputs van bedrijfstak i op de waarde van de productie van alle bedrijfstakken van de economie.

Er werd ook aangetoond dat, wanneer men een kostenmodel (cost-push price model) gebruikt, de prijsveranderingen leiden tot een wijziging van de inputcoëfficiënten ($\mathrm{A}^1 \neq \mathrm{A}^0$) en geen invloed hebben op de outputcoëfficiënten ($\mathrm{B}^1 = \mathrm{B}^0$) . Dit wettigt de Ghosh-hypothese van vaste technische outputcoëfficiënten in het geval van een kostenmodel.

Volledigheidshalve moet worden vermeld dat het prijsmodel van Ghosh een duaal kwantiteitsmodel heeft, dat gelijke resultaten geeft als het kwantiteitsmodel van Leontief. Net zoals het klassieke Leontief-model berust het kwantiteitsmodel van Ghosh op een horizontale lezing van de input-outputtabel van de binnenlandse productie (demand-pull quantity model). Het deelt met het prijsmodel van Ghosh de hypothese van vaste outputcoëfficiënten. De kenmerken van het **kwantiteitsmodel van Ghosh** worden hierna in Tabel 2 weergegeven.

[7] Het cijfer '0' duidt op de beginsituatie, het cijfer '1' op de nieuwe situatie.

3.4. De modellen van Leontief en Ghosh: overzichtstabel

De voorstelling van de modellen van Leontief en Ghosh heeft getoond dat die verschillende modellen gelinkt zijn:

- de kwantiteits- en prijsmodellen (zowel van Leontief als van Ghosh) werden beschreven als 'duale' modellen: de eerste bepalen de hoeveelheden (waarbij de prijzen vastliggen), terwijl de tweede de prijzen bepalen (waarbij de hoeveelheden vastliggen) terwijl zij eenzelfde hypothese delen over de structuur van de intersectorale verhoudingen (vaste inputcoëfficiënten in het geval van Leontief, vaste outputcoëfficiënten in het geval van Ghosh).
- De modellen van Leontief en Ghosh worden bestempeld als spiegelmodellen. Het kwantiteitsmodel van Ghosh geeft een spiegelbeeld van het kwantiteitsmodel van Leontief; het prijsmodel van Leontief geeft een spiegelbeeld van het prijsmodel van Ghosh.

tabel 2 vat de voornaamste kenmerken van de kwantiteitsmodellen en prijsmodellen van Ghosh en Leontief nog eens samen.

Tabel 2 De modellen van Leontief en van Ghosh, in prijs en in hoeveelheid

	Kwantiteitsmodel van Leontief	Kwantiteitsmodel van Ghosh	Prijsmodel van Leontief	Prijsmodel van Ghosh
Modeltypes	Demand-pull quantity model	Demand-pull quantity model	Cost-Push price model	Cost-Push price model
Hypothesen	De prijzen zijn vast De hoeveelheden schommelen Vaste inputcoëfficiënten	De prijzen zijn vast De hoeveelheden schommelen Vaste outputcoëfficiënten	De hoeveelheden zijn vast De prijzen schommelen Vaste inputcoëfficiënten	De hoeveelheden zijn vast De prijzen schommelen Vaste outputcoëfficiënten
Exogene variabelen	Finale vraag $y^{d\,1}$	Finale vraag per eenheid product $y_c^{d\,1} = (\hat{x}^0)^{-1}\, y^{d\,1}$	Primaire inputs per eenheid product $\tilde{v}_c^1 = (\hat{x}^0)^{-1}\, \tilde{v}^1$	Primaire inputs $\tilde{v}^1$
Endogene variabelen	Productie (waarde) $x^1 = L^0 y^{d\,1}$	Hoeveelheidsindexen $\tilde{x} = (\hat{x}^0)^{-1} x^1 = G^0\, y_c^{d\,1}$	Prijsindexen $\tilde{p} = (\hat{x}^0)^{-1} x^1 = (L^0)'\, \tilde{v}_c^1$	Productie (waarde) $x^1 = (G^0)'\, \tilde{v}^1$
Stabiliteit van de coëfficiënten	$A^1 = A^0$	$B^1 \neq B^0$	$A^1 \neq A^0$	$B^1 = B^0$

4. De multiplicatoren

Multiplicatoren vormen een klassieke toepassing van de input-outputmodellen. Ze worden vaak gebruikt in economische impactanalyses. Ze kunnen bijvoorbeeld gebruikt worden om de effecten te ramen van een verandering van de overheidsuitgaven of van het bestaan van quota, op de productie, het energieverbruik of de vervuilende emissies van de verschillende bedrijfstakken, of op de werkgelegenheid of de primaire inputs gegenereerd in die verschillende bedrijfstakken.

"Het begrip multiplicatoren steunt op het verschil tussen het initiële **effect** van een exogene verandering en de **totale effecten** van die verandering. " (Miller en Blair, 2009, p. 244). Multiplicatoren vertegenwoordigen de totale effecten van een exogene verandering, in verhouding tot de initiële effecten van die verandering. De raming van de totale effecten is het resultaat van de toepassing van één van de input-outputmodellen voorgesteld in het vorige hoofdstuk. Een multiplicator kiezen betekent dus ook kiezen voor een model en de hypothesen aanvaarden die eraan ten grondslag liggen.

4.1. De multiplicatoren van de finale vraag

De multiplicatoren van de finale vraag vloeien vanzelfsprekend voort uit de door de finale vraag bepaalde input-outputmodellen. In het kader van die modellen is de exogene schok een verandering in het finaal verbruik uit binnenlandse output van één of meer producten. Multiplicatoren van de finale vraag vertegenwoordigen de ratio van de totale effecten van een verandering van de finale vraag, in verhouding tot de initiële effecten van die verandering.

Nemen we het voorbeeld van een verandering met een euro van het finaal verbruik uit binnenlandse output van product j. Het **totale effect** van die verandering op de output van de gehele economie wordt opgedeeld in verschillende effecten:

- Een **initieel effect** dat zich altijd situeert op het niveau van de bedrijfstak die de impuls ondergaat. Het verwijst naar de exogene schok: de bedrijfstak j zal zijn productie verhogen met een euro om te voldoen aan de bijkomende finale vraag.
- Een **direct effect** (= first-round effect): om die bijkomende productie te verzekeren, zal bedrijfstak j een beroep moeten doen op zijn directe toeleveranciers. Dat direct effect is gelijk aan $\sum_i a_{ij}$;
- Een **indirect effect** (= second and subsequent round effects) : die leveranciers zullen op hun beurt een bijkomende vraag naar inputs richten aan hun toeleveranciers, die zelf opnieuw hun toeleveranciers zullen contacteren …[8] Het indirect effect is gelijk aan $\sum_i l_{ij} - \sum_i a_{ij} - 1$ [9].
- Een **door het gezinsverbruik geïnduceerd effect** (in het geval van een gesloten model). Om die bijkomende productie te verzekeren, doen de verschillende bedrijfstakken een beroep op de huishoudsector (als werknemers). De stijging van het gezinsinkomen leidt automatisch tot een toename van hun consumptieve bestedingen, waaraan wordt voldaan door een bijkomende verhoging van de productie...

[8] West en Jensen (1980) noemen dat effect het 'Industrial Support Effect'.

[9] Ter herinnering: a_{ij} is een technische coëfficiënt van inputs en l_{ij} is een element van de Leontief-inverse (zie punt 3.1.1).

Indien men meer geïnteresseerd is in de effecten van die verandering op de werkgelegenheid, is het initiële effect gelijk aan de verandering van de werkgelegenheid binnen de bedrijfstak j die rechtstreeks gekoppeld is aan de verandering van de output van bedrijfstak j, of de werkgelegenheidscoëfficiënt van bedrijfstak j ($e_{cj} = e_j/x_j$). Het direct effect is gelijk aan $\sum_i e_{ci}a_{ij}$ en het indirect effect is gelijk aan $\sum_i e_{ci}l_{ij} - \sum_i e_{ci}a_{ij} - e_{cj}$.

In de context van een **open** input-outputmodel is het totale effect beperkt tot de drie eerste effecten[10]. Wanneer het gaat om een **gesloten model** met endogeen gezinsverbruik, omvat het totale effect ook het door het gezinsverbruik geïnduceerde effect.

Multiplicatoren zijn dus in zekere zin een maatstaf voor de reactie van een economie op een exogene schok. In de literatuur treffen we verschillende maatstaven aan: zowel absolute als relatieve. De **absolute** maatstaven worden uitgedrukt in verhouding tot de exogene schok, d.w.z. per eenheid finaal verbruik uit binnenlandse output. De **relatieve** maatstaven geven de verhouding weer van het totale effect van de verandering van de finale vraag tot het initiële effect van die verandering (bijvoorbeeld, de totale verandering van de werkgelegenheid op de initiële verandering van de werkgelegenheid, in het geval van een relatieve werkgelegenheidsmultiplicator).

In de literatuur worden de multiplicatoren van de finale vraag vaak opgesplitst in 4 categorieën: afhankelijk van het model waarvan ze zijn afgeleid en naargelang de maatstaf van het totale effect van de finale vraag absoluut of relatief is.

- De categorie "**enkelvoudige multiplicatoren**" omvat absolute multiplicatoren die geraamd worden op basis van een open model;
- De categorie "**totale multiplicatoren**" omvat de absolute multiplicatoren waarvan de totale effecten ook door het gezinsverbruik geïnduceerde effecten omvatten (gesloten model);
- De categorie "**multiplicatoren van Type I**" omvat de relatieve multiplicatoren waarvan de totale effecten geraamd worden op basis van een open model;
- De categorie "**multiplicatoren van Type II**" omvat de relatieve multiplicatoren waarvan de totale effecten geïnduceerde effecten omvatten (gesloten modellen).

Tabel 3 De multiplicatoren van de finale vraag

Multiplicatoren van de finale vraag		Modellen	
		Open (directe en indirecte effecten)	Gesloten (directe, indirecte en geïnduceerde effecten)
Maatstaven	Absolute	Enkelvoudige multiplicatoren	Totale multiplicatoren
	Relatieve	Multiplicatoren van Type I	Multiplicatoren van Type II

De voorstelling van de multiplicatoren van de finale vraag beperkt zich hier tot de productie-, werkgelegenheids- en inkomensmultiplicatoren die voortvloeien uit het klassieke (open) input-outputmodel van Leontief en uit het gesloten input-outputmodel met endogeen gezinsverbruik.

10 Meer algemeen kan het concept multiplicator verklaard worden op basis van de volgende iteratieve redenering: de verandering van de finale vraag Δy leidt tot een initieel effect op de productie dat gelijk is aan $\Delta x^0 = \Delta y$, wat op zijn beurt leidt tot een direct effect op de productie $\Delta x^1 = A^d\,\Delta x^0 = A\,\Delta y$, gevolgd door een indirect eerste-ronde-effect $\Delta\, x^2 = A^d\,\Delta x^1 = (A^d)^2\Delta y$, dat zelf leidt tot een bijkomend indirect effect tijdens de volgende ronde… Tot in het oneindige is het totale effect dan gelijk aan $\Delta\, x = \left(I + A^d + (A^d)^2 + (A^d)^3 + \ \ldots\right)\Delta y = (I - A^d)^{-1}\Delta y$.

De geïnteresseerde lezer kan gemakkelijk andere multiplicatoren van de finale vraag afleiden, zoals de multiplicatoren van het energieverbruik of de multiplicatoren van polluenten.

4.1.1. De productiemultiplicatoren van de finale vraag

De productiemultiplicatoren van de finale vraag meten de impact van een wijziging van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een of meer goederen op de totale productie van de economie.

In het geval van de productiemultiplicatoren van de finale vraag, is het initiële effect op de productie van de wijziging van een euro van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een product gelijk aan de wijziging van de finale vraag zelf (m.a.w. de exogene schok). Om die reden zijn de absolute en de relatieve maatstaven in dit geval identiek.

a. De enkelvoudige productiemultiplicatoren

<table>
<tr><th></th><th>Productiemultiplicatoren</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Enkelvoudige multiplicator</td><td>De enkelvoudige productiemultiplicatoren resulteren uit het traditionele (open) Leontief input-outputmodel (met n producten).

$$\Delta x = (I - A^d)^{-1}\,\Delta\bar{y}^d = L\,\Delta\bar{y}^d$$
Het initiële effect van een wijziging van het finaal verbruik uit binnenlandse output vertegenwoordigt de productie die rechtstreeks nodig is om aan die bijkomende finale vraag te voldoen, of de wijziging van de finale vraag zelf, $i'\Delta\bar{y}^d$.

Het totale effect stemt overeen met de totale binnenlandse productie die die bijkomende finale vraag rechtstreeks en onrechtstreeks genereert in de gezamenlijke economie, via de intermediaire leveringen, of $i'L\,\Delta\bar{y}^d$. Het wordt opgesplitst in een initieel effect ($i'\Delta\bar{y}^d$), een direct effect ($i'A^d\,\Delta\bar{y}^d$) en een indirect effect, $i'L\,\Delta\bar{y}^d - i'\Delta\bar{y}^d - i'A^d\,\Delta\bar{y}^d$).

De enkelvoudige productiemultiplicator van het finaal verbruik is gelijk aan $\frac{i'\,L\,\Delta\bar{y}^d}{i'\,\Delta\bar{y}^d}$</td></tr>
<tr><td>In het geval van een wijziging van een eenheid van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een enkel product j, is de enkelvoudige productiemultiplicator gelijk aan de som van de elementen van de j^{de} kolom van de Leontief-inverse.

$$m\,(output - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n} l_{ij}$$
De productiemultiplicator van het product j stemt overeen met de productie die in de gezamenlijke economie wordt gegenereerd per euro van het finaal verbruik uit binnenlandse output van het product j.</td></tr>
</table>

b. De totale productiemultiplicatoren

<table>
<tr><th></th><th>Productiemultiplicatoren</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Totale multiplicatoren</td><td>De totale productiemultiplicatoren resulteren uit het gesloten input-outputmodel met endogeen gezinsverbruik (n+1 producten).

$$\Delta\breve{\mathrm{x}} = (\mathrm{I} - \breve{\mathrm{A}})^{-1}\,\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}} = \breve{\mathrm{L}}\,\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}}$$

met $\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}}$ als de finale vraag verminderd met de gezinsconsumptie.

Het initiële effect van een wijziging van het finaal verbruik uit binnenlandse output vertegenwoordigt de productie die rechtstreeks nodig is om aan die bijkomende finale vraag te voldoen, of de wijziging van de finale vraag zelf, $\mathrm{i}'\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}}$.

Het totale effect is gelijk aan $\mathrm{i}'\breve{\mathrm{L}}\,\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}}$. Het omvat het initiële effect, de effecten die ontstaan door intermediaire leveringen (direct effect + indirect effect) en de bijkomende geïnduceerde effecten die gegenereerd worden via de stijging van de inkomens van de gezinnen in ruil voor arbeid en de daaruit voortvloeiende stijging van hun finale consumptieve bestedingen.

De totale productiemultiplicator van de finale vraag is gelijk aan $\frac{\mathrm{i}'\breve{\mathrm{L}}\,\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}}}{\mathrm{i}'\,\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}}}$</td></tr>
<tr><td>In het geval van een wijziging van een eenheid van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een enkel product j, is de totale productiemultiplicator gelijk aan de som van de elementen van de j^{de} kolom van de uitgebreide inverse matrix $\breve{\mathrm{L}}$.

$$\breve{m}\ (output - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n+1} \breve{l}_{ij}$$</td></tr>
<tr><td>Om de totale multiplicator te vergelijken met de enkelvoudige multiplicator, wordt best een multiplicator berekend die zich beperkt tot de n originele producten. De totale verkorte productiemultiplicator is gelijk aan

$$\breve{m}_t\ (output - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n} \breve{l}_{ij}$$

Het in aanmerking nemen van de impact van de stijging van de gezinsconsumptie als gevolg van een inkomensgroei leidt er logischerwijs toe dat de totale productiemultiplicatoren, zelfs verkort, groter zijn dan de enkelvoudige productiemultiplicatoren.</td></tr>
</table>

4.1.2. De werkgelegenheids- en inkomensmultiplicatoren van de finale vraag

Om het effect te ramen van een wijziging van de finale vraag op de werkgelegenheid of op de inkomens moet de wijziging van de productie als gevolg van de stijging van de finale vraag omgezet worden in een wijziging van banen of inkomens [11]. In de input-outputmodellen, zijn de werkgelegenheid en de primaire inputs lineair afhankelijk van de productie. Gegeven e, de vector van de werkgelegenheid, v, de vector van de primaire inputs, $\mathrm{e}' = \mathrm{e}'_{\mathrm{c}}\,\hat{\mathrm{x}}$ en $\mathrm{v}' = \mathrm{v}'_{\mathrm{c}}\,\hat{\mathrm{x}}$, met e'_{c}, de vector van de werkgelegenheidscoëfficiënten (aantal tewerkgestelden per euro productie) en v'_{c}, de vector van de primaire inputcoëfficiënten (primaire inputs per eenheid product).

a. De werkgelegenheidsmultiplicatoren van de finale vraag

De werkgelegenheidsmultiplicatoren van de finale vraag meten de impact van een wijziging van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een of meer producten op de totale werkgelegenheid van de economie.

We onderscheiden vier werkgelegenheidsmultiplicatoren van de finale vraag, al naargelang het model open of gesloten is en de wijziging van de finale vraag (absoluut gemeten) of de initiële wijziging van de werkgelegenheid (relatief gemeten) opgenomen wordt in de noemer.

De enkelvoudige werkgelegenheidsmultiplicatoren

	Werkgelegenheidsmultiplicatoren
Enkelvoudige multiplicator	De enkelvoudige werkgelegenheidsmultiplicatoren resulteren uit het traditionele (open) Leontief input-outputmodel. Ze meten de totale werkgelegenheid die in de economie wordt ingezet per euro finaal verbruik uit binnenlandse output van een of meer producten. Het **totale effect** op de werkgelegenheid van een wijziging van het finaal verbruik uit binnenlandse output stemt overeen met de totale werkgelegenheid die die bijkomende finale binnenlandse vraag direct en indirect genereert in de gezamenlijke economie, via intermediaire leveringen. Het is gelijk aan $\mathrm{e}'_{\mathrm{c}}\,\mathrm{L}\,\Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}$. Het bestaat uit een initieel effect ($\mathrm{e}'_{\mathrm{c}}\,\Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}$), een direct effect ($\mathrm{e}'_{\mathrm{c}}\,\mathrm{A}^{\mathrm{d}}\,\Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}$) en een indirect effect ($\mathrm{e}'_{\mathrm{c}}\mathrm{L}\,\Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} - \mathrm{e}'_{\mathrm{c}}\Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} - \mathrm{e}'_{\mathrm{c}}\mathrm{A}^{\mathrm{d}}\Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}$). De **enkelvoudige werkgelegenheidsmultiplicator** is gelijk aan $\frac{\mathrm{e}'_{\mathrm{c}}\,\mathrm{L}\,\Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}}{\mathrm{i}'\,\Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}}$
	In het geval van een wijziging van een eenheid van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een enkel product j, is **de enkelvoudige werkgelegenheidsmultiplicator** gelijk aan de som, gewogen door de werkgelegenheidscoëfficiënten, van de elementen van de j$^{\mathrm{de}}$ kolom van de Leontief-inverse $m\,(employment - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n} e_{ci} l_{ij}$ De enkelvoudige werkgelegenheidsmultiplicator van een product j stemt overeen met de totale werkgelegenheid die direct en indirect wordt ingezet in de gezamenlijke economie per euro van het finaal verbruik uit binnenlandse output van product j.

[11] De inkomens worden gemeten door de primaire inputs. Die stemmen overeen met de verschillende componenten van de toegevoegde waarde plus de belastingen minus subsidies op de intermediaire producten.

De totale werkgelegenheidsmultiplicatoren

<table>
<tr><th></th><th>Werkgelegenheidsmultiplicatoren</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Totale multiplicatoren</td><td>De totale werkgelegenheidsmultiplicatoren zijn afkomstig van het gesloten input-outputmodel inclusief het gezinsverbruik. Ze meten de totale werkgelegenheid die in de gezamenlijke economie wordt ingezet per euro finaal verbruik uit binnenlandse output van een of meer producten.

Het totale effect van die wijziging is gelijk aan de som van de initiële, directe, indirecte en geïnduceerde effecten op de werkgelegenheid. De initiële, directe en indirecte effecten komen overeen met de werkgelegenheid die wordt ingezet binnen de bedrijfstak en de keten van zijn leveranciers om te beantwoorden aan de bijkomende finale vraag. De geïnduceerde effecten vertegenwoordigen de bijkomende werkgelegenheid die nodig is om te beantwoorden aan de toename van de finale consumptieve bestedingen vanwege de gezinnen. Het totale effect op de werkgelegenheid is gelijk aan $\breve{\mathrm{e}}'_{\mathrm{c}}\,\breve{\mathrm{L}}\,\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}}$, met $\breve{\mathrm{e}}'_{\mathrm{c}} = [\mathrm{e}'_{\mathrm{c}} \quad {}^{e_{n+1}}/_{x_{n+1}}]$

De totale werkgelegenheidsmultiplicator is gelijk aan $\frac{\breve{\mathrm{e}}'_{\mathrm{c}}\,\breve{\mathrm{L}}\,\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}}}{\mathrm{i}'\,\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}}}$</td></tr>
<tr><td>In het geval van een wijziging van een eenheid van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een enkel product j, is de totale werkgelegenheidsmultiplicator gelijk aan de som, gewogen door de werkgelegenheidscoëfficiënten, van de elementen van de j^{de} kolom van de uitgebreide Leontief-inverse $\breve{\mathrm{L}}$

$$\breve{m}\;(employment - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n+1} e_{ci}\,\breve{l}_{ij}$$</td></tr>
<tr><td>Indien men zich wil beperken tot de n originele producten, is de totale verkorte werkgelegenheidsmultiplicator van het product j gelijk aan

$$\breve{m}_t\;(employment - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n} e_{ci}\,\breve{l}_{ij}$$</td></tr>
</table>

De werkgelegenheidsmultiplicatoren van Type I

<table>
<tr><td></td><td>Werkgelegenheidsmultiplicatoren</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Multiplicatoren van Type I</td><td>De werkgelegenheidsmultiplicatoren van Type I meten de totale werkgelegenheid die in de gezamenlijke economie wordt ingezet per eenheid initiële werkgelegenheid verbonden aan een wijziging van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een of meer producten.

Het totale effect op de werkgelegenheid is afkomstig van het traditionele (open) Leontief input-outputmodel ($\mathrm{e}_{\mathrm{c}}' \, \mathrm{L} \, \Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}$). Het initiële effect op de werkgelegenheid van de wijziging van de finale vraag uit binnenlandse productie vertegenwoordigt hier de werkgelegenheid die direct gekoppeld is aan de exogene schok, of $\mathrm{e}_{\mathrm{c}}' \, \Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}$.

De werkgelegenheidsmultiplicator van Type I is gelijk aan $\frac{\mathrm{e}_{\mathrm{c}}' \, \mathrm{L} \, \Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}}{\mathrm{e}_{\mathrm{c}}' \, \Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}}$</td></tr>
<tr><td>In het geval van een wijziging met een eenheid van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een enkel product j, is de werkgelegenheidsmultiplicator van Type I gelijk aan

$$m\,(employment - to - demand)_j^I = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_{ci}\, l_{ij}}{e_{cj}} = \frac{m\,(employment{-}to{-}demand)_j}{e_{cj}}$$

De werkgelegenheidsmultiplicator van Type I van het product j geeft de mate waarin de initiële effecten op de werkgelegenheid van een wijziging van de finale vraag uit binnenlandse productie, worden versterkt wanneer de directe en indirecte effecten in aanmerking genomen worden.</td></tr>
</table>

De werkgelegenheidsmultiplicatoren van Type II

<table>
<tr><td></td><td>Werkgelegenheidsmultiplicatoren</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Multiplicatoren van Type II</td><td>De werkgelegenheidsmultiplicatoren van Type II zijn afkomstig van het gesloten input-outputmodel met endogeen gezinsverbruik. Ze meten de totale werkgelegenheid die in de gezamenlijke economie wordt ingezet per eenheid initiële werkgelegenheid verbonden aan een wijziging van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een of meer producten.

Het totale effect op de werkgelegenheid is gelijk aan $\check{\mathrm{e}}_{\mathrm{c}}' \, \check{\mathrm{L}} \, \Delta\check{\bar{\mathrm{y}}}$. Het initiële effect op de werkgelegenheid vertegenwoordigt de werkgelegenheid die direct verbonden is aan de wijziging van het finaal verbruik uit binnenlandse output, of $\check{\mathrm{e}}_{\mathrm{c}}' \, \Delta\check{\bar{\mathrm{y}}}$.

De werkgelegenheidsmultiplicator van Type II is gelijk aan $\frac{\check{\mathrm{e}}_{\mathrm{c}}' \, \check{\mathrm{L}} \, \Delta\check{\bar{\mathrm{y}}}}{\check{\mathrm{e}}_{\mathrm{c}}' \, \Delta\check{\bar{\mathrm{y}}}}$</td></tr>
<tr><td>In het geval van een wijziging met een eenheid van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een enkel product j, is de werkgelegenheidsmultiplicator van Type II gelijk aan

$$m\,(employment - to - demand)_j^{II} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} e_{ci}\, \check{l}_{ij}}{e_{cj}} = \frac{\check{m}\,(employment{-}to{-}demand)_j}{e_{cj}}$$</td></tr>
<tr><td>De verkorte werkgelegenheidsmultiplicator van Type II van het product j is gelijk aan

$$m_t\,(employment - to - demand)_j^{II} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_{ci}\, \check{l}_{ij}}{e_{cj}} = \frac{\check{m}_t\,(employment{-}to{-}demand)_j}{e_{cj}}$$</td></tr>
</table>

b. De inkomensmultiplicatoren van de finale vraag

Volgens hetzelfde principe meten **de inkomensmultiplicatoren van de finale vraag** de impact van een wijziging in het finaal verbruik uit binnenlandse output van een of meer producten op de totale primaire inputs van de economie.

We onderscheiden vier inkomensmultiplicatoren van de finale vraag, al naargelang het model open of gesloten is en de wijziging van de finale vraag (absoluut gemeten) of de initiële wijziging van de primaire inputs (relatief gemeten) opgenomen wordt in de noemer.

De enkelvoudige inkomensmultiplicatoren

<table>
<tr><th></th><th>Inkomensmultiplicatoren</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Enkelvoudige multiplicator</td><td>De enkelvoudige inkomensmultiplicatoren resulteren uit het traditionele (open) Leontief input-outputmodel. Ze meten de totale primaire inputs die in de gezamenlijke economie worden gecreëerd per euro finaal verbruik uit binnenlandse output van een of meer producten.

Het totale effect op de primaire inputs van een wijziging van het finaal verbruik uit binnenlandse output stemt overeen met de bijkomende primaire inputs die die bijkomende finale vraag creëert in de gezamenlijke economie, via intermediaire leveringen. Het is gelijk aan $v_c' \, L \, \Delta\bar{y}^d$. Het wordt opgesplitst in een initieel effect ($v_c' \, \Delta\bar{y}^d$), een direct effect ($v_c' \, A^d \, \Delta\bar{y}^d$) en een indirect effet ($v_c' L \, \Delta\bar{y}^d - v_c'\Delta\bar{y}^d - \; v_c' \, A^d \Delta\bar{y}^d$).

De enkelvoudige inkomensmultiplicator is gelijk aan $\frac{v_c' \, L \, \Delta\bar{y}^d}{i' \, \Delta\bar{y}^d}$</td></tr>
<tr><td>In het geval van een wijziging met een eenheid van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een enkel product j, is de enkelvoudige inkomensmultiplicator gelijk aan de som, gewogen door de primaire inputcoëfficiënten, van de elementen van de j^{de} kolom van de Leontief-inverse

$$m\ (primary\ inputs - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ci} \, l_{ij}$$

De enkelvoudige inkomensmultiplicator van het product j stemt overeen met de totale primaire inputs die gecreëerd worden in de gezamenlijke economie per euro finale vraag uit binnenlandse productie van product j.</td></tr>
</table>

De totale inkomensmultiplicatoren

<table>
<tr><th></th><th>Inkomensmultiplicatoren</th></tr>
<tr><td rowspan="3">De totale multiplicatoren</td><td>De totale inkomensmultiplicatoren resulteren uit het gesloten input-outputmodel inclusief het gezinsverbruik. Ze meten de totale primaire inputs die in de gezamenlijke economie worden gegenereerd per euro finaal verbruik uit binnenlandse output van een of meer producten.

Het totale effect op de primaire inputs is gelijk aan de som van de initiële, directe, indirecte en geïnduceerde effecten. De initiële, directe en indirecte effecten komen overeen met de primaire inputs die de bijkomende finale vraag teweegbrengt binnen de bedrijfstak en de keten van zijn leveranciers via intermediaire leveringen. De geïnduceerde effecten vertegenwoordigen de bijkomende primaire inputs die gecreëerd worden door de toename van de finale consumptieve bestedingen van de gezinnen. Het totale effect op de primaire inputs is gelijk aan $\check{v}'_c\, \check{L}\, \Delta\check{\bar{y}}$, met $\check{v}'_c = [v'_c \quad {}^{v_{n+1}}/_{x_{n+1}}]$

De totale inkomensmultiplicator is gelijk aan $\frac{\check{v}'_c\, \check{L}\, \Delta\check{\bar{y}}}{i'\Delta\check{\bar{y}}}$</td></tr>
<tr><td>In het geval van een wijziging van een eenheid van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een enkel product j, is de totale inkomensmultiplicator gelijk aan de som, gewogen door de primaire inputcoëfficiënten, van de elementen van de j^{de} kolom van de uitgebreide inverse matrix $\check{L}$

$$\check{m}\ (primary\ inputs - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n+1} v_{ci}\, \check{l}_{ij}$$</td></tr>
<tr><td>Indien men zich wil beperken tot de n originele producten, is de totale verkorte inkomensmultiplicator van het product j gelijk aan

$$\check{m}_t\ (primary\ inputs - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ci}\, \check{l}_{ij}$$</td></tr>
</table>

De inkomensmultiplicatoren van Type I

<table>
<tr><td></td><td>Inkomensmultiplicatoren</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Multiplicatoren van Type I</td><td>De inkomensmultiplicatoren van Type I resulteren uit het traditionele (open) Leontief input-outputmodel. Ze meten de totale primaire inputs die in de gezamenlijke economie worden gecreëerd per eenheid initiële primaire input verbonden aan een wijziging van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een of meer producten.

Het initiële effect stemt overeen met de primaire inputs die direct verbonden zijn aan de wijziging van het finaal verbruik uit binnenlandse output, of $\mathrm{v}'_c\, \Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}$. Het totale effect stemt overeen met de additionele primaire inputs die de bijkomende finale vraag creëert in de gezamenlijke economie via intermediaire leveringen, of $\mathrm{v}'_c\, \mathrm{L}\, \Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}$.

De inkomensmultiplicator van Type I is gelijk aan $\frac{\mathrm{v}'_c\, \mathrm{L}\, \Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}}{\mathrm{v}'_c\, \Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}}$</td></tr>
<tr><td>In het geval van een wijziging van een eenheid van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een enkel product j, is de inkomensmultiplicator van Type I gelijk aan

$$m\ (primary\ inputs - to - demand)^{I}_{j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_{ci}\, l_{ij}}{v_{cj}} = \frac{m\ (primary\ inputs{-}to{-}demand)_j}{v_{cj}}$$</td></tr>
</table>

De inkomensmultiplicatoren van Type II

<table>
<tr><td></td><td>Inkomensmultiplicatoren</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Multiplicator van Type II</td><td>De inkomensmultiplicatoren van Type II zijn afkomstig van het gesloten input-outputmodel met endogeen gezinsverbruik. Ze meten de totale primaire inputs die in de gezamenlijke economie gecreëerd worden per eenheid initiële primaire input verbonden aan een wijziging van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een of meer producten.

Het initiële effect vertegenwoordigt de primaire inputs die direct verbonden zijn aan de toename van het finaal verbruik uit binnenlandse output, of $\breve{\mathrm{v}}'_c\, \Delta\breve{\bar{\mathrm{y}}}$. Het totale effect is gelijk aan de som van de initiële, directe, indirecte en geïnduceerde effecten op de primaire inputs, of $\breve{\mathrm{v}}'_c\, \breve{\mathrm{L}}\, \Delta\breve{\bar{\mathrm{y}}}$

De inkomensmultiplicator van Type II is gelijk aan $\frac{\breve{\mathrm{v}}'_c\, \breve{\mathrm{L}}\, \Delta\breve{\bar{\mathrm{y}}}}{\breve{\mathrm{v}}'_c\, \Delta\breve{\bar{\mathrm{y}}}}$</td></tr>
<tr><td>In het geval van een wijziging van een eenheid van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een enkel product j, is de inkomensmultiplicator van Type II gelijk aan

$$m\ (primary\ inputs - to - demand)^{II}_{j} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} v_{ci}\, \breve{l}_{ij}}{v_{cj}} = \frac{\breve{m}\ (primary\ inputs{-}to{-}demand)_j}{v_{cj}}$$</td></tr>
<tr><td>De verkorte inkomensmultiplicator van Type II van het product j is gelijk aan

$$m_t(primary\ inputs - to - demand)^{II}_{j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_{ci}\, \breve{l}_{ij}}{v_{cj}} = \frac{\breve{m}_t\ (primary\ inputs{-}to{-}demand)_j}{v_{cj}}$$</td></tr>
</table>

4.1.3. De keuze van de multiplicatoren

Er moet worden benadrukt dat de keuze van het type multiplicator van de finale vraag dat geraamd zal worden (enkelvoudig, totaal, type I of type II) niet onbelangrijk is en tot verschillende interpretaties zal leiden.

Een open model of een gesloten model?

De enkelvoudige multiplicatoren en die van Type I resulteren uit een open model, terwijl de totale multiplicatoren en die van Type II afgeleid zijn uit een gesloten model. Miller en Blair (2009, p. 253) stellen: "It is generally conceded that Type I multipliers probably underestimate economic impacts (since households activity is absent) and Type II multipliers probably give an overestimate (because of the rigid assumptions about labor incomes and attendant consumer spending). For example, Oosterhaven, Piek and Stedler (1986, p. 69) suggest 'These two multipliers may be considered as upper and lower bounds on the true indirect effect of an increase in final demand; a realistic estimate generally lies roughly halfway between Type I and Type II multipliers'."

Absolute of relatieve multiplicatoren?

Die keuze zal afhangen van de vraag die men wenst te beantwoorden.

– De absolute multiplicatoren, zij het enkelvoudig of totaal, vertegenwoordigen de totale effecten van een wijziging van de finale vraag *per euro van de finale vraag*. **Ze kunnen enkel vermenigvuldigd worden met elementen van de exogene finale vraag**.
– De relatieve multiplicatoren (van Type I of Type II) geven aan in welke mate de initiële effecten op de werkgelegenheid, primaire inputs ..., van een verandering van de finale vraag versterkt worden wanneer de directe en indirecte effecten (en geïnduceerde, in het geval van gesloten modellen) in aanmerking genomen worden. Een hoge multiplicator kan zowel wijzen op een belangrijk totaal effect als op een zwak initieel effect. Die multiplicatoren moeten in geen enkel geval vermenigvuldigd worden met de finale vraag of productie. **Ze zijn bestemd om vermenigvuldigd te worden met een maatstaf van werkgelegenheid, primaire inputs ...**

De eerste input-outputtabellen opgemaakt door het Federaal Planbureau, namelijk die van 1985 en 1990 (INR, 1998 en 1999), gingen vergezeld van de publicatie van enkelvoudige werkgelegenheids- en inkomensmultiplicatoren. Vanaf de input-outputtabellen van 1995 (INR, 2003) werd de definitie van de werkgelegenheids- en inkomensmultiplicatoren van Type I gebruikt in onze toepassingen.

4.1.4. De multiplicatoren van de finale vraag: overzichtstabellen

Onderstaande tabel 4 en tabel 5 bieden een overzicht van de verschillende multiplicatoren van de finale vraag. De eerste tabel geeft de productie-, werkgelegenheids- en inkomensmultiplicatoren van het finaal verbruik uit binnenlandse output van een bedrijfstak j. De tweede tabel geeft de vectoren van de verschillende productie-, werkgelegenheids- en inkomensmultiplicatoren van de finale vraag.

Tabel 4 Productie-, werkgelegenheids- en inkomensmultiplicatoren van het finaal verbruik gericht aan bedrijfstak j

Multiplicatoren	Productiemultiplicatoren	Werkgelegenheidsmultiplicatoren	Inkomensmultiplicatoren
Enkelvoudig	$\sum_{i=1}^{n} l_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} e_{ci} l_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} v_{ci}\, l_{ij}$
Totaal	$\sum_{i=1}^{n+1} \check{l}_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n+1} e_{ci}\, \check{l}_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n+1} v_{ci}\, \check{l}_{ij}$
Totaal verkort	$\sum_{i=1}^{n} \check{l}_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} e_{ci}\, \check{l}_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} v_{ci}\, \check{l}_{ij}$
Type I		$\sum_{i=1}^{n} e_{ci}\, l_{ij} / e_{cj}$	$\sum_{i=1}^{n} v_{ci}\, l_{ij} / v_{cj}$
Type II		$\sum_{i=1}^{n+1} e_{ci}\, \check{l}_{ij} / e_{cj}$	$\sum_{i=1}^{n+1} v_{ci}\, \check{l}_{ij} / v_{cj}$
Type II verkort		$\sum_{i=1}^{n} e_{ci}\, \check{l}_{ij} / e_{cj}$	$\sum_{i=1}^{n} v_{ci}\, \check{l}_{ij} / v_{cj}$

Tabel 5 Vectoren van de productie-, werkgelegenheids- en inkomensmultiplicatoren van de finale vraag *(dimensie (1xn))*

Multiplicatoren	Productiemultiplicatoren	Werkgelegenheidsmultiplicatoren	Inkomensmultiplicatoren
Enkelvoudig	$\mathrm{i}'\,\mathrm{L}$ (1 x n) (n x n)	$\mathrm{e}_c'\,\mathrm{L}$ (1 x n) (n x n)	$\mathrm{v}_c'\,\mathrm{L}$ (1 x n) (n x n)
Totaal	$\mathrm{i}' \begin{bmatrix} \check{\mathrm{L}}_{11} \\ \check{\mathrm{L}}_{21} \end{bmatrix}$ (1 x (n+1)) ((n+1) x n)	$\check{\mathrm{e}}_c' \begin{bmatrix} \check{\mathrm{L}}_{11} \\ \check{\mathrm{L}}_{21} \end{bmatrix}$ (1 x (n+1)) ((n+1) x n)	$\check{\mathrm{v}}_c' \begin{bmatrix} \check{\mathrm{L}}_{11} \\ \check{\mathrm{L}}_{21} \end{bmatrix}$ (1 x (n+1)) ((n+1) x n)
Totaal verkort	$\mathrm{i}'\check{\mathrm{L}}_{11}$ (1 x n) (n x n)	$\mathrm{e}_c'\check{\mathrm{L}}_{11}$ (1 x n) (n x n)	$\mathrm{v}_c'\check{\mathrm{L}}_{11}$ (1 x n) (n x n)
Type I		$\mathrm{e}_c'\mathrm{L}(\hat{\mathrm{e}}_c')^{-1}$ (1 x n) (n x n) (n x n)	$\mathrm{v}_c'\mathrm{L}(\hat{\mathrm{v}}_c')^{-1}$ (1 x n) (n x n) (n x n)
Type II		$\check{\mathrm{e}}_c' \begin{bmatrix} \check{\mathrm{L}}_{11} \\ \check{\mathrm{L}}_{21} \end{bmatrix} (\hat{\mathrm{e}}_c')^{-1}$ (1 x (n+1)) ((n+1) x n) (n x n)	$\check{\mathrm{v}}_c' \begin{bmatrix} \check{\mathrm{L}}_{11} \\ \check{\mathrm{L}}_{21} \end{bmatrix} (\hat{\mathrm{v}}_c')^{-1}$ (1 x (n+1)) ((n+1) x n) (n x n)
Type II verkort		$\mathrm{e}_c'\check{\mathrm{L}}_{11}(\hat{\mathrm{e}}_c')^{-1}$ (1 x n) (n x n) (n x n)	$\mathrm{v}_c'\,\check{\mathrm{L}}_{11}(\hat{\mathrm{v}}_c')^{-1}$ (1 x n) (n x n) (n x n)

4.2. Multiplicatoren die resulteren uit een verandering van de productie

Hoofdstuk 4.1 heeft aangetoond dat traditionele Leontief input-outputtabellen of gesloten input-outputtabellen geschikt zijn om een antwoord te geven op vragen naar de impact van de finale bestedingen op de productie of op andere productiegebonden variabelen (zoals de werkgelegenheid of het energieverbruik)..

Maar wat nu wanneer het een vraag betreft naar de effecten van een exogene schok die de productie aantast (en niet de finale bestedingen)? Verschillende input-outputmodellen kunnen een antwoord bieden op dat soort vragen. Voorzichtigheid is echter geboden bij het automatisch gebruik van multiplicatoren die daaruit worden afgeleid. Elk geval moet individueel worden onderzocht om het input-outputmodel te kiezen dat het meest geschikt is om de situatie correct in te schatten.

Om situaties te modelleren waarin de *totale* productie van een of meer bedrijfstakken exogeen wordt bepaald (bestaan van quota, beperkte natuurlijke hulpbronnen, introductie van een nieuwe activiteit in een regio...) wordt een beroep gedaan op een **gemengd input-outputmodel**. Dergelijke modellen zijn namelijk dusdanig opgesteld dat er geen feedbackeffect bestaat van de endogene productie op de exogene productie.

Om de impact op de totale productie van de economie te ramen van een exogene *initiële* schok die ingrijpt op de productie van een gegeven bedrijfstak, wordt het **klassieke Leontief input-outputmodel** gebruikt. In tegenstelling tot het voorgaande geval, zal de exogene schok hier mogelijk de bedrijfstak die de exogene schok ondergaat, direct en indirect beïnvloeden.

4.2.1. Productiemultiplicatoren afgeleid uit het gemengde input-outputmodel

Wanneer gemengde input-outputmodellen toegepast worden op situaties waarin enkel de exogene productie varieert, kan de totale impact op de productie van een economie berekend worden uitgaande van een exogene verandering van de *totale* productie van een of meer bedrijfstakken en kan daar vervolgens een productiemultiplicator worden uit afgeleid.

a. Algemeen geval: meerdere exogene producties

Gegeven het gemengde input-outputmodel, gecombineerd met de hypothese dat enkel de exogene producties (van de n - k laatste bedrijfstakken) wijzigingen ondergaan ($\Delta\,\bar{\mathrm{x}} \neq 0$ en $\Delta\,\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} = 0$):

$$\begin{bmatrix} \underset{k\,x\,1}{\Delta \mathrm{x}} \\ \underset{(n-k)\,x\,1}{\Delta \mathrm{y}^{\mathrm{d}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{k\,x\,k}{\mathrm{L}^k} & \underset{k\,x\,(n-k)}{\mathrm{L}^k \mathrm{A}_{12}^{\mathrm{d}}} \\ \underset{(n-k) x\,k}{-\mathrm{A}_{21}^{\mathrm{d}} \mathrm{L}^k} & \underset{(n-k)\,x\,(n-k)}{\left(\mathrm{I} - \mathrm{A}_{22}^{\mathrm{d}}\right) - \mathrm{A}_{21}^{\mathrm{d}} \mathrm{L}^k \mathrm{A}_{12}^{\mathrm{d}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{k\,x\,1}{0} \\ \underset{(n-k)\,x\,1}{\Delta \bar{\mathrm{x}}} \end{bmatrix}$$

Het effect op de endogene productie (van de k eerste producten) van een verandering van de exogene productie is gelijk aan: $\mathrm{i}'\Delta\,\mathrm{x} = \mathrm{i}'\mathrm{L}^k \mathrm{A}_{12}^{\mathrm{d}} \Delta\,\bar{\mathrm{x}}$. *Het totale effect op de productie* wordt verkregen door toevoeging van de impact op de exogene productie. Die laatste bedraagt $\mathrm{i}'\Delta\,\bar{\mathrm{x}}$.

De **productiemultiplicator van de productie** is gelijk aan

$$\frac{\mathrm{i}'\Delta\,\bar{\mathrm{x}} + \mathrm{i}'\,\Delta\,\mathrm{x}}{\mathrm{i}'\Delta\,\bar{\mathrm{x}}} = 1 + \frac{\mathrm{i}'\mathrm{L}^{k}\mathrm{A}_{12}^{\mathrm{d}}\,\Delta\,\bar{\mathrm{x}}}{\mathrm{i}'\Delta\,\bar{\mathrm{x}}}$$

In het geval van een unitaire verandering van de exogene productie van een enkele bedrijfstak (bedrijfstak n) is de **productiemultiplicator van de bedrijfstak n** gelijk aan

$$1 + \mathrm{i}'\mathrm{L}^{(n-1)}\mathrm{A}_{12}^{\mathrm{d}}$$

m.a.w. de som van de n-1 elementen van kolomvector $\mathrm{L}^{(n-1)}\mathrm{A}_{12}^{\mathrm{d}}$ plus een eenheid (die overeenstemt met de exogene productie). Die multiplicator toont de productie die direct en indirect nodig is in de volledige economie om een *totale* bijkomende productie van 1 euro van product n te verzekeren.

De alternatieve formulering (« the one-sided mixed variable model ») zoals weergegeven in punt 3.2.2 levert dezelfde resultaten op.

$$\begin{bmatrix}\Delta\mathrm{x}\\ \Delta\mathrm{x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{L}^{k} & \mathrm{L}^{k}\mathrm{A}_{12}^{\mathrm{d}}\\ 0 & \mathrm{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \Delta\bar{\mathrm{x}}\end{bmatrix} = \tilde{\mathrm{L}}^{n}\begin{bmatrix}0\\ \Delta\bar{\mathrm{x}}\end{bmatrix}$$

of

$$\Delta\mathrm{x} = \left(\mathrm{I} - \widetilde{\mathrm{A}}\right)^{-1}\Delta\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}} = \tilde{\mathrm{L}}^{n}\Delta\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}}$$

Die formulering heeft als voordeel dat de multiplicatoren van de productie een traditionele vorm aannemen:

De **productiemultiplicator van de productie** is gelijk aan $\frac{\mathrm{i}'\tilde{\mathrm{L}}^{n}\Delta\,\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}}}{\mathrm{i}'\Delta\,\bar{\mathrm{x}}}$

De **werkgelegenheidsmultiplicator van de productie** is gelijk aan $\frac{\mathrm{e}_{\mathrm{c}}'\,\tilde{\mathrm{L}}^{n}\Delta\,\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}}}{\mathrm{i}'\Delta\,\bar{\mathrm{x}}}$

De **inkomensmultiplicator van de productie** is gelijk aan $\frac{\mathrm{v}_{\mathrm{c}}'\,\tilde{\mathrm{L}}^{n}\Delta\,\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}}}{\mathrm{i}'\Delta\,\bar{\mathrm{x}}}$

b. Bijzonder geval: een enkele exogene productie

In het bijzonder geval met een enkele exogene totale productie ($\bar{x}_j$), bestaat er een alternatieve, eenvoudiger te ramen, benadering die dezelfde resultaten oplevert als de toepassing van het gemengde model. Die benadering verwijst naar het begrip 'output-to-output multiplier' van Miller en Blair (1985).

In het klassieke Leontief input-outputmodel vertalen de elementen van de inverse matrix de veranderingen van het finaal verbruik uit binnenlandse output in veranderingen van de totale productie, $\Delta x_i = l_{ij}\Delta y_j$ of $l_{ij} = \Delta x_i/\Delta y_j$. Het element l_{jj} dat zich op de diagonaal bevindt, is gelijk aan $\Delta x_j/\Delta y_j$, waaruit volgt dat $\Delta x_j = l_{jj}\Delta y_j$.

Als het element l_{ij}^{*} wordt bepaald als de verhouding tussen l_{ij} en l_{jj}, krijgen we:

$$l_{ij}^{*} = l_{ij}/l_{jj} = \frac{\Delta x_i/\Delta y_j}{\Delta x_j/\Delta y_j} = \Delta x_i/\Delta x_j$$

of

$$\Delta x_i = l_{ij}^{*}\ \Delta x_j$$

De elementen l_{ij}^{*} kunnen worden beschouwd als **productiemultiplicatoren als gevolg van een verandering van de productie** (output-to-output multipliers). Ze geven de productieverandering van bedrijfstak i die nodig zal zijn om te beantwoorden aan een verandering van een euro productie van bedrijfstak j.

In matrixvorm wordt de matrix van de elementen l_{ij}^{*} verkregen door de elementen van elke kolom van matrix L te delen door het diagonaalelement uit de betreffende kolom, of $L^{*} = L\ \hat{L}^{-1}$.

De vector $\Delta x^{*} = L^{*}\ \Delta\bar{x}_j$, met $\Delta\bar{x}_j{}' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \Delta\bar{x}_j & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, omvat de producties van de verschillende bedrijfstakken die nodig zijn om te beantwoorden aan de totale verandering van de productie van bedrijfstak j ($\Delta\bar{x}_j$)).

De productiemultiplicator van de exogene productie van bedrijfstak j wordt verkregen door de som te nemen van de elementen van de j[e] kolom van matrix L*.

$$m\ (output - to - output)_j = \sum_{i=1}^{n} l_{ij}^{*}$$

Die multiplicator geeft de productie van de gezamenlijke economie die direct en indirect nodig is om te beantwoorden aan een eenheid van de totale productie van bedrijfstak j.

Wanneer het erom gaat de impact te ramen van de productie van een enkele exogene bedrijfstak, levert die alternatieve benadering voor de endogene producties dezelfde resultaten op als de toepassing van het gemengde model. Het toepassen van die benadering is bijzonder gemakkelijk en maakt het mogelijk de bestaande relatie tussen de enkelvoudige productiemultiplicatoren van de finale vraag van bedrijfstak j en de productiemultiplicatoren van de output van die bedrijfstak zichtbaar te maken. De eerste liggen altijd hoger dan de tweede, met een factor $(l_{jj} - 1)$ x 100 procent.

4.2.2. Productiemultiplicatoren afgeleid uit het klassieke input-outputmodel

Om de impact op de totale productie van de economie te ramen van een exogene *initiële* schok die ingrijpt op de productie van een gegeven bedrijfstak, wordt het klassieke Leontief input-outputmodel gebruikt.

We nemen het geval van een bedrijfstak j die besluit zijn productie exogeen te verhogen met een euro. Om die productie te realiseren, zal een bijkomende inputvraag gericht worden aan zijn leveranciers die gelijk is aan de j^e kolom van matrix A. Die nieuwe (endogeen bepaalde) vraag vormt in zekere zin een exogene vraag, die indirecte effecten zal hebben die vergelijkbaar zijn met een wijziging van de finale vraag. De totale impact van die nieuwe vraag op de economie zal dus gelijk zijn aan de j^e kolom van matrix L A .

Meer algemeen, indien $\Delta\bar{\bar{x}}_j$ de initiële schok op de productie van bedrijfstak j vertegenwoordigt, is het effect op de productie van de economie van een exogene initiële schok op de productie van bedrijfstak j gelijk aan:

$$i'\Delta \mathrm{x} = i'\mathrm{L\,A}\,\Delta\bar{\bar{\mathrm{x}}}_\mathrm{j}, \text{ met } \Delta\bar{\bar{\mathrm{x}}}'_\mathrm{j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \Delta\bar{\bar{x}}_j & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

De daarmee verbonden multiplicator is gelijk aan $\widetilde{m} = i'\mathrm{LA}$.

Maar $\mathrm{L\,A} = \mathrm{L}\big(\mathrm{I} - (\mathrm{I} - \mathrm{A})\big) = \mathrm{L} - \mathrm{L}(\mathrm{I} - \mathrm{A}) = \mathrm{L} - \mathrm{L}(\mathrm{L})^{-1} = \mathrm{L} - \mathrm{I}.$

De multiplicator is dus gelijk aan $\widetilde{m} = i'\mathrm{LA} = i'(\mathrm{L} - \mathrm{I})$.

Die multiplicator is de 'netto iteratieve multiplicator' van de Mesnard (2002). Hij vertegenwoordigt de directe en indirecte effecten op de productie als gevolg van het initiële effect op de productie. In tegenstelling tot de klassieke multiplicator van de finale vraag (de zogenaamde bruto multiplicator), omvat hij niet de initiële schok op de teller. Door die toe te voegen, krijgen we de enkelvoudige multiplicator van de finale vraag (of totale multiplicator, in het geval van een gesloten model).

De netto iteratieve multiplicator werd ontwikkeld om een antwoord te bieden op de vraag naar de effecten op de productie van de economie van een exogene initiële schok op de productie (i.p.v. op de finale vraag). In die zin vervult hij zijn rol. Maar, zoals Oosterhaven (2007, p. 281) stelt: ‘this is a useful multiplier, but it is an old and regular, i.e. gross multiplier. Numerically the iterative net multipliers equal the column sums of the Leontief-inverse minus 1, which means that they do not provide more information than is already contained in the gross output multipliers $i'\mathrm{L}$ ‘.

5. Linkagemaatstaven

Door zijn productieactiviteit is een economische bedrijfstak op twee manieren verbonden met de andere bedrijfstakken:

- de verhoging van zijn productie veroorzaakt een hogere vraag bij de bedrijfstakken die zijn inputs produceren. De term "backward linkage" verwijst naar de relatie tussen een specifieke bedrijfstak en de toeleverende (stroomopwaartse) bedrijfstakken waar die bedrijfstak zijn inputs aankoopt;
- de verhoging van zijn productie veroorzaakt een hoger aanbod van producten bestemd voor de bedrijfstakken die zijn productie aanwenden als input voor hun eigen productie. De term "forward linkage" wijst op de relatie tussen een specifieke bedrijfstak en de afnemende (stroomafwaartse) bedrijfstakken waaraan die bedrijfstak zijn productie verkoopt;

In de literatuur worden verschillende maatstaven voorgesteld om de stroomopwaartse en de stroomafwaartse relaties tussen de bedrijfstakken te ramen. Die maatstaven berusten op twee methoden die hun oorsprong vinden in het klassieke Leontief input-outputmodel en het prijsmodel van Ghosh.

- De eerste methode, soms aangeduid als *'The Classical Multiplier Method'*, meet de stroomopwaartse en stroomafwaartse relaties van een bedrijfstak op basis van elementen van de matrices A, B, L en G. De eerste werkzaamheden worden toegeschreven aan Rasmussen (1956), Hirschman (1958) en Chenery en Watanabe (1958).
- De tweede methode, *'The Hypothetical Extraction Method'* (HEM), werd oorspronkelijk geïntroduceerd door Paelinck et al. (1965) en Strassert (1968). Om het onderliggende netwerk aan relaties van een bedrijfstak te ramen, wordt de verwijdering van die bedrijfstak uit de economie gesimuleerd en het verlies aan productie als gevolg daarvan gemeten.

Wanneer de linkagemaatstaven toegepast worden op een specifieke economie, kunnen, door de vergelijking van de intensiteit van de stroomop- en -afwaartse relaties van de verschillende bedrijfstakken binnen die economie, de sleutelsectoren onderscheiden worden. Aangezien de aandacht uitgaat naar de binnenlandse economie, worden, zoals hierboven uitgelegd, de modellen van Leontief en Ghosh op basis van de input-outputtabellen van de binnenlandse productie gebruikt.

De linkagemaatstaven kunnen tevens aangewend worden om de productiestructuren van verschillende landen te vergelijken. In dat geval gaat het om internationale vergelijkingen van verschillende productieprocessen, ongeacht de oorsprong van de verbruikte producten. Het Leontief-model en het prijsmodel van Ghosh zijn hier dus gebaseerd op de totale input-outputtabel en de matrices A en B zijn afgeleid van de matrix van het totaal intermediair verbruik (Z). Het Leontief-model kan als volgt herschreven worden: $x = Z\,i + (y - m)$, met m als vector van de invoer. Het prijsmodel van Ghosh wordt: $x = Z'\,i + v$.

De twee bovenvermelde methoden worden in de literatuur frequent gebruikt om de sleutelsectoren van een economie te identificeren en te meten. Nochtans maakt alleen de HEM-methode het mogelijk om een echte indicator af te leiden voor het economisch belang van een bedrijfstak door een eenduidige meting van de *totale* relaties van die bedrijfstak met de rest van de economie. De HEM-linkagemaatstaven maken het tevens mogelijk het relatieve belang van een bedrijfstak te bepalen voor een economie volgens verschillende criteria: economisch, sociaal, milieugebonden, bijvoorbeeld in termen van productie, werkgelegenheidscreatie, vervuilende emissies...

5.1. 'The Classical Multiplier Method'

De maatstaven die van die methode zijn afgeleid, omvatten de stroomop- en -afwaartse linkagemaatstaven, de directe[12] en totale linkagemaatstaven, de enkelvoudige en genormaliseerde maatstaven.

5.1.1. Backward linkages

De term "backward linkage" verwijst naar de relatie tussen een specifieke bedrijfstak en de toeleverende (stroomopwaartse) bedrijfstakken waar die bedrijfstak zijn inputs aankoopt. De "backward linkage"-maatstaven worden geraamd in het kader van een klassiek Leontief input-outputmodel.

<table>
<tr><th></th><th colspan="3">Backward Linkages - Enkelvoudige maatstaven</th></tr>
<tr><td rowspan="9">The Classical Multiplier Method</td><td colspan="3">Directe relaties (d)

Een maatstaf voor de directe stroomopwaartse relaties van een bedrijfstak wordt gegeven door de som van de technische coëfficiënten van de inputs van die bedrijfstak (som van de kolom van de matrix A^d). Hij geeft aan in welke mate de productie van die bedrijfstak afhankelijk is van intermediaire leveringen.</td></tr>
<tr><td></td><td>Bedrijfstak j</td><td>Vector</td></tr>
<tr><td>Direct backward linkage</td><td>$\mathrm{BL(d)_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{d}$</td><td>$\mathrm{b(d)} = [\mathrm{BL(d)}_1 \quad \dots \quad \mathrm{BL(d)}_n] = \mathrm{i'A^d}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Totale relaties (t)

Een maatstaf voor de directe en indirecte stroomopwaartse relaties in een economie kan verkregen worden door de som van de kolom van de Leontief-inverse ($\mathrm{L} = (\mathrm{I} - \mathrm{A^d})^{-1}$). Die maatstaf is gelijk aan de enkelvoudige productiemultiplicator.</td></tr>
<tr><td></td><td>Bedrijfstak j</td><td>Vector</td></tr>
<tr><td>Total backward linkage</td><td>$\mathrm{BL(t)}_j = \sum_{i=1}^{n} l_{ij}$</td><td>$\mathrm{b(t)} = [\mathrm{BL(t)}_1 \quad \dots \quad \mathrm{BL(t)}_n] = \mathrm{i'L}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\mathrm{BL(t)}_j$ meet het directe en indirecte effect van een verhoging met een euro van het finaal verbruik uit binnenlandse output van product j op de productie van de gezamenlijke economie.

Variant: de elementen die zich op de diagonaal van de matrix L bevinden, uitsluiten uit de maatstaf, teneinde de stroomopwaartse afhankelijkheid te meten van een bedrijfstak ten opzichte van de rest van de economie.</td></tr>
</table>

[12] "Measures of direct linkages are simply transformations of input-output account data, but they are not always sufficiently interesting because they do not capture much of the inherent complexity of an economy" (Miller en Lahr, 2001, p. 410).

	Backward Linkages - Genormaliseerde maatstaven		
The Classical Multiplier Method	De literatuur stelt verschillende manieren voor om de enkelvoudige maatstaven te normaliseren, bijvoorbeeld door ze te delen door hun rekenkundig gemiddelde[13].		
	Directe relaties (d)	Bedrijfstak j	Vector
	Normalized direct backward linkage	$\overline{\mathrm{BL}}(\mathrm{d})_j = \frac{\mathrm{BL}(\mathrm{d})_j}{(1/n)\sum_{j=1}^{n}\mathrm{BL}(\mathrm{d})_j}$	$\bar{\mathrm{b}}(\mathrm{d}) = \frac{\mathrm{i}'\mathrm{A}^{\mathrm{d}}}{(\mathrm{i}'\mathrm{A}^{\mathrm{d}}\mathrm{i})/n} = \frac{n\,\mathrm{i}'\mathrm{A}^{\mathrm{d}}}{\mathrm{i}'\mathrm{A}^{\mathrm{d}}\mathrm{i}}$
	Totale relaties (t)		
	Normalized total backward linkage	$\overline{\mathrm{BL}}(\mathrm{t})_j = \frac{\mathrm{BL}(\mathrm{t})_j}{(1/n)\sum_{j=1}^{n}\mathrm{BL}(\mathrm{t})_j}$	$\bar{\mathrm{b}}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{i}'\mathrm{L}}{(\mathrm{i}'\mathrm{L}\mathrm{i})/n} = \frac{n\,\mathrm{i}'\mathrm{L}}{\mathrm{i}'\mathrm{L}\mathrm{i}}$
	De gemiddelde waarde van die maatstaven is de eenheid. De bedrijfstakken met stroomopwaartse relaties boven het gemiddelde hebben een index hoger dan 1. De bedrijfstakken met stroomopwaartse relaties onder het gemiddelde hebben een index lager dan 1.		

5.1.2. Forward linkages

De term "forward linkage" wijst op de relatie tussen een specifieke bedrijfstak en de afnemende (stroomafwaartse) bedrijfstakken waaraan die bedrijfstak zijn productie verkoopt.

Aanvankelijk werden de stroomafwaartse linkagemaatstaven geraamd in het kader van een klassiek Leontief input-outputmodel, als de rijsom van de elementen van de matrix A^d (direct forward linkage) of L (total forward linkage). Vanaf midden jaren 70 werden die eerste stroomafwaartse linkagemaatstaven in vraag gesteld aangezien ze steunden op de weinig waarschijnlijke hypothese van een gelijktijdige unitaire stijging van de productie van alle bedrijfstakken (in het geval van een directe linkagemaatstaf) of van het finaal verbruik van alle bedrijfstakken (in het geval van een totale linkagemaatstaf).

Er werd dus gesuggereerd dat het prijs-input-outputmodel van Ghosh (dat steunt op de allocatiecoëfficiënten van de productie) meer geschikt is om de vraag naar de bestemming van de productie te beantwoorden dan het traditionele Leontief-model (dat gebaseerd is op de technische inputcoëfficiënten) (Jones, 1976).

[13] Er werden ook verschillende gewogen gemiddelden voorgesteld.

Forward Linkages - Enkelvoudige maatstaven

The Classical Multiplier Method

Directe relaties (d)

Een directe maatstaf voor de stroomafwaartse relaties van een bedrijfstak wordt gegeven door de som van de allocatiecoëfficiënten van die bedrijfstak (rijsom van de elementen van de matrix B^d). Die geeft aan in welke mate de productie van die bedrijfstak bestemd is voor het productieproces van de overige bedrijfstakken.

	Bedrijfstak i	Vector
Direct forward linkage	$\mathrm{FL(d)}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^d$	$\mathrm{f(d)} = [\mathrm{FL(d)}_1 \quad \ldots \quad \mathrm{FL(d)}_n] = \mathrm{B^d i}$

Totale relaties (t)

Een maatstaf voor de directe en indirecte stroomafwaartse relaties in een economie kan verkregen worden door de rijsom van de elementen van de Ghosh-inverse ($\mathrm{G} = (\mathrm{I} - \mathrm{B^d})^{-1}$). Die maatstaf is ook gekend onder de naam enkelvoudige inputmultiplicator.

	Bedrijfstak i	Vector
Total forward linkage	$\mathrm{FL(t)}_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}$	$\mathrm{f(t)} = [\mathrm{FL(t)}_1 \quad \ldots \quad \mathrm{FL(t)}_n] = \mathrm{Gi}$

$\mathrm{FL(t)}_i$ meet het directe en indirecte effect van een unitaire prijsverhoging van de primaire inputs van bedrijfstak i op de waarde van de productie van alle bedrijfstakken.

Variant: de elementen die zich op de diagonaal van de matrix G bevinden, uitsluiten uit de maatstaf, om de stroomafwaartse afhankelijkheid te meten van een bedrijfstak ten opzichte van de *rest* van de economie.

Forward Linkages - Genormaliseerde maatstaven

The Classical Multiplier Method

De literatuur stelt verschillende manieren voor om de enkelvoudige maatstaven te normaliseren, bijvoorbeeld door ze te delen door hun rekenkundig gemiddelde.

Directe relaties (d)	Bedrijfstak i	Vector
Normalized direct forward linkage	$\overline{\mathrm{FL}}(\mathrm{d})_i = \frac{\mathrm{FL(d)}_i}{(1/n)\sum_{i=1}^{n}\mathrm{FL(d)}_i}$	$\bar{\mathrm{f}}(\mathrm{d}) = \frac{\mathrm{B^d i}}{(\mathrm{i'B^d i})/n} = \frac{n\,\mathrm{B^d i}}{\mathrm{i'B^d i}}$
Totale relaties (t)		
Normalized total forward linkage	$\overline{\mathrm{FL}}(\mathrm{t})_i = \frac{\mathrm{FL(t)}_i}{(1/n)\sum_{i=1}^{n}\mathrm{FL(t)}_i}$	$\bar{\mathrm{f}}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{Gi}}{(\mathrm{i'Gi})/n} = \frac{n\,\mathrm{Gi}}{\mathrm{i'Gi}}$

De gemiddelde waarde van die maatstaven is de eenheid. De bedrijfstakken met stroomafwaartse relaties boven het gemiddelde hebben een index hoger dan 1. De bedrijfstakken met stroomafwaartse relaties onder het gemiddelde hebben een index lager dan 1.

5.1.3. Classificatie op basis van stroomopwaartse en stroomafwaartse maatstaven

De studies die deze linkagemaatstaven gebruiken om de 'sleutelsectoren' van een economie te bepalen, combineren gewoonlijk de stroomopwaartse en stroomafwaartse resultaten van de bedrijfstak (doorgaans op het niveau van de genormaliseerde maatstaven). Op basis daarvan worden de bedrijfstakken vaak ingedeeld in 4 categorieën. Tabel 6 toont die indeling.

Tabel 6 Classificatie van de bedrijfstakken op basis van de resultaten van de genormaliseerde linkagemaatstaven (stroomopwaarts en stroomafwaarts)

		Normalized Direct or Total Forward Linkages	
		Zwak (<1)	Hoog (>1)
Normalized Direct or Total Backward Linkages	**Zwak (<1)**	(I) Vrij onafhankelijk van de andere bedrijfstakken	(II) Afhankelijk van de intermediaire vraag
	Hoog (>1)	(III) Afhankelijk van het intermediair aanbod	(IV) Vrij afhankelijk van de andere bedrijfstakken

Bron: Miller en Blair (2009)

5.1.4. Net backward en Net forward linkages

De maatstaf van de netto stroomopwaartse en stroomafwaartse relaties is een alternatieve maatstaf van het economisch belang van een bedrijfstak. Die heeft als bijzondere eigenschap dat hij niet enkel de afhankelijkheid van een economie tot een bedrijfstak meet (unilaterale maatstaf), maar ook rekening houdt met de afhankelijkheid van die bedrijfstak t.o.v. de rest van de economie (bilaterale maatstaf).

a. Net backward linkages

De maatstaf van de netto stroomopwaartse relaties werd ingevoerd door Oosterhaven en Stedler in 2002.

De **netto stroomopwaartse relaties** van bedrijfstak j worden gedefinieerd als de ratio van de productie die in de gezamenlijke economie wordt gegenereerd door het finaal verbruik uit binnenlandse output van bedrijfstak j en de productie van bedrijfstak j die nodig is om te voldoen aan de finale vraag aan alle bedrijfstakken.

$$\mathrm{B}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}} = \frac{BL(t)_j\, y_j}{x_j} = \frac{\text{som van de } \mathrm{j}^{\mathrm{e}} \text{ kolom van de matrix } \mathrm{L}\hat{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}}{\text{som van de } \mathrm{j}^{\mathrm{e}} \text{ rij van de matrix } \mathrm{L}\hat{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}}$$

Een waarde voor $\mathrm{B}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}}$ hoger dan 1 betekent dat de productie die in de gezamenlijke economie wordt gegenereerd door het finaal verbruik uit binnenlandse output van bedrijfstak j hoger is dan de productie die in bedrijfstak j wordt gegenereerd door de finale vraag aan alle bedrijfstakken. Dit geeft m.a.w. aan dat de rest van de economie meer stroomopwaarts afhangt van de bedrijfstak j dan dat bedrijfstak j stroomopwaarts afhangt van de rest van de economie.

b. Net forward linkages

Temurshoev en Oosterhaven (2010) stellen een maatstaf van de netto stroomafwaartse relaties voor, analoog met de maatstaf van Oosterhaven en Stedler (2002).

De **netto stroomafwaartse relaties** van bedrijfstak j worden gedefinieerd als de ratio van de productie die in de gezamenlijke economie wordt gegenereerd door de primaire inputs verhoogd met de intermediaire invoer van bedrijfstak j en de productie van bedrijfstak j die gegenereerd wordt door de primaire inputs verhoogd met de intermediaire invoer van alle bedrijfstakken.

$$\mathrm{F}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}} = \frac{v_j FL(t)_j}{x_j} = \frac{\text{som van de j}^{\text{e}}\text{ rij van de matrix }\hat{\hat{v}}\text{G}}{\text{som van de j}^{\text{e}}\text{ kolom van de matrix }\hat{\hat{v}}\text{G}}$$

Een waarde voor $\mathrm{F}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}}$ hoger dan 1 betekent dat de productie die in de gezamenlijke economie wordt gegenereerd door de primaire inputs verhoogd met de intermediaire invoer van bedrijfstak j hoger is dan de productie die in bedrijfstak j wordt gegenereerd door de primaire inputs van alle bedrijfstakken. Dit geeft aan dat de rest van de economie meer stroomafwaarts afhangt van bedrijfstak j dan dat bedrijfstak j stroomafwaarts afhangt van de rest van de economie.

5.2. ‘The Hypothetical Extraction Method’

De HEM-benadering bestaat erin het belang van een bedrijfstak te meten door die bedrijfstak uit de economie te halen om de totale bijdrage ervan tot de productie van die economie te meten. Die methode berust op de hypothese dat de productiestructuur van de overige bedrijfstakken van de economie niet wijzigt. Impliciet betekent dit dat de invoer de aankopen en de leveringen van de bedrijfstak die er werd uitgehaald vervangt, wat een ‘lek’ is in het productieproces.

De HEM-methode wordt eerst volledig toegepast (volledige eliminatie van de bedrijfstak), waardoor de totale relaties van de verschillende bedrijfstakken gemeten kunnen worden (punt 5.2.1). Nadien wordt ze gedeeltelijk toegepast (eliminatie van de aankopen van binnenlandse intermediaire inputs / de leveringen van intermediaire inputs) om de stroomopwaartse en -afwaartse relaties afzonderlijk te kunnen meten (punt 5.2.2 en 5.2.3).

5.2.1. Maatstaven van de totale relaties via de extractiemethode

Om de totale relaties van een bedrijfstak te ramen, wordt de volledige verwijdering van die bedrijfstak uit de economie gesimuleerd en het verlies aan productie als gevolg daarvan gemeten. Het meten van de totale relaties via de HEM-methode heeft algemeen de verschillende pogingen verdrongen om de totale relaties te meten via een combinatie van stroomopwaartse en stroomafwaartse maatstaven uit het klassieke model.

De maatstaven van de totale relaties van de verschillende bedrijfstakken via de HEM-methode worden geraamd in het kader van een klassiek Leontief input-output-model.

	Total linkages - Absolute maatstaven
Hypothetical extraction method	Beschouw een economie met n bedrijfstakken. In het kader van een klassiek Leontief input-outputmodel, is de vector van de productie van die economie gelijk aan $$\mathrm{x} = \left(\mathrm{I} - \mathrm{A}^{\mathrm{d}}\right)^{-1} \mathrm{y}^{\mathrm{d}}$$ Gegeven $\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{d}}_{(j)}$, *de matrix van de technische coëfficiënten waarvan de j^e^ regel en de j^e^ kolom vervangen zijn door nullen en* $\overline{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}_{(j)}$, *de vector van de finale vraag waarvan het j^e^ element op nul wordt gebracht*[14], kan de productievector $\overline{\mathrm{x}}_{(j)}$ geraamd worden die in die economie zou worden gerealiseerd **indien bedrijfstak j integraal verwijderd werd**. $$\overline{\mathrm{x}}_{(j)} = \left(\mathrm{I} - \overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{d}}_{(j)}\right)^{-1} \overline{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}_{(j)}$$ *Een maatstaf van de **totale relaties** van bedrijfstak j bestaat in het verschil tussen die twee producties.* $$\mathrm{T}^{\mathrm{h}}_{(j)} = \mathrm{i}'\mathrm{x} - \mathrm{i}'\overline{\mathrm{x}}_{(j)}$$ $\mathrm{T}_{(j)}$ geeft een raming van het belang van bedrijfstak j door het productieverlies te meten dat de economie zou lijden indien die bedrijfstak zou verdwijnen. *Variant*: de productie van bedrijfstak j uitsluiten uit de initiële productie. De maatstaf *van de **totale relaties*** wordt dus $$\mathrm{T}^{\mathrm{h,v}}_{(j)} = \left(\mathrm{i}'\mathrm{x} - x_j\right) - \mathrm{i}'\overline{\mathrm{x}}_{(j)}$$

Dat scenario werd soms bestempeld als de "shut-down of the industry" aangezien bedrijfstak j integraal verdwijnt. Cella (1984) stelt een andere manier voor om een bedrijfstak te verwijderen teneinde het belang ervan voor de economie te meten: hij oppert om enkel de stroomopwaartse en -afwaartse relaties te verwijderen die de bedrijfstak onderhoudt met de overige bedrijfstakken van de economie als afnemer en als leverancier van intermediaire inputs (de elementen a_{jj}^{d} en y_j^{d} worden niet op nul gezet). Miller en Lahr (2001) tonen aan dat beide scenario's dezelfde resultaten opleveren in termen van vermindering van de productie van de resterende bedrijfstakken ($\forall\ i \neq j$) [15].

Wanneer men de invloed van de omvang van de bedrijfstak wil uitsluiten bij het vergelijken van de verschillende absolute linkagemaatstaven afgeleid van de HEM-methode of bij de vergelijking van de HEM-linkagemaatstaven (die een meeteenheid hebben) met de linkagemaatstaven geraamd op basis van de traditionele methode (zonder eenheden), is het gebruik van genormaliseerde linkagemaatstaven aangeraden. In de literatuur worden verschillende manieren voorgesteld om de HEM-maatstaven te normaliseren.

14 Om te verzekeren dat de productie van bedrijfstak j gelijk is aan nul.

15 De geïnteresseerde lezer vindt in Miller en Lahr (2001) een taxonomie van de verschillende extractiemogelijkheden in het kader van de blokmatrices L en G.

	Total linkages - Genormaliseerde maatstaven
Hypothetical extraction method	(1) *Daling van de productie per eenheid productie van bedrijfstak j* $(\mathrm{i}'\ \mathrm{x}-\mathrm{i}'\ \bar{\mathrm{x}}_{(j)})/x_j$ of $[(\mathrm{i}'\ \mathrm{x}-\ x_j)-\mathrm{i}'\ \bar{\mathrm{x}}_{(j)}]/\ x_j$ De maatstaf aan de linkerzijde is gelijk aan de productiemultiplicator van de productie, geraamd op basis van het gemengd input-outputmodel. (2) *Daling van de productie in procent van de totale oorspronkelijke productie* $\overline{\mathrm{T}}_{(j)}^{\mathrm{h}}=100*[(\mathrm{i}'\ \mathrm{x}-\mathrm{i}'\ \bar{\mathrm{x}}_{(j)})/\mathrm{i}'\ \mathrm{x}]$ of $\overline{\mathrm{T}}_{(j)}^{\mathrm{h,v}}=100*[(\mathrm{i}'\ \mathrm{x}-x_j-\mathrm{i}'\ \bar{\mathrm{x}}_{(j)})/\mathrm{i}'\ \mathrm{x}]$ (3) *Ten opzichte van het gemiddelde van $\overline{\boldsymbol{T}}_{(j)}^{\boldsymbol{h}}$ of $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{(j)}^{\boldsymbol{h}}$* $\hat{\mathrm{T}}_{(j)}^{\mathrm{h}}=n\overline{\mathrm{T}}_{(j)}^{\mathrm{h}}/\sum_{j=1}^{n}\overline{\mathrm{T}}_{(j)}^{\mathrm{h}}$ of $\hat{\mathrm{T}}_{(j)}^{\mathrm{h,v}}=n\overline{\mathrm{T}}_{(j)}^{\mathrm{h,v}}/\sum_{j=1}^{n}\overline{\mathrm{T}}_{(j)}^{\mathrm{h,v}}$

5.2.2. Maatstaven van de stroomopwaartse relaties via de extractiemethode

De stroomopwaartse linkagemaatstaven van de verschillende bedrijfstakken via de extractiemethode worden geraamd in het kader van een klassiek Leontief input-outputmodel. In dat geval wordt een bedrijfstak deels verwijderd uit de economie aan de hand van de hypothese dat hij niet langer binnenlandse intermediaire inputs aankoopt (en die vervangt door invoer).

	Backward Linkages - Absolute maatstaven
Hypothetical extraction method	In het kader van een klassiek Leontief input-outputmodel, is de productievector van de economie gelijk aan $\mathrm{x}=(\mathrm{I}-\mathrm{A}^{\mathrm{d}})^{-1}\mathrm{y}^{\mathrm{d}}$ Door de matrix $\bar{\mathrm{A}}_{(cj)}^{\mathrm{d}}$ te bepalen als *de matrix van de technische coëfficiënten waarvan de j^e kolom vervangen is door nullen*, kan de productie geraamd worden die gerealiseerd zou worden in een economie **indien bedrijfstak j geen binnenlandse intermediaire input meer aankoopt.** $\bar{\mathrm{x}}_{(cj)}=(\mathrm{I}-\bar{\mathrm{A}}_{(cj)}^{\mathrm{d}})^{-1}\mathrm{y}^{\mathrm{d}}$ *De **stroomopwaartse relaties** van bedrijfstak j kunnen gemeten worden door het verschil tussen de totale oorspronkelijke productie en de totale productie die gerealiseerd zou worden indien de stroomopwaartse relaties van die bedrijfstak zouden wegvallen.* $\mathrm{B}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{h}}=\mathrm{i}'\mathrm{x}-\mathrm{i}'\bar{\mathrm{x}}_{(cj)}$

Een alternatieve maatstaf voor de stroomopwaartse verbanden van bedrijfstak j via de extractiemethode bestaat erin de leveringen binnen de bedrijfstak te behouden ($a_{jj}^{d}\neq 0$) (Miller en Lahr, 2001).

In de literatuur worden verschillende manieren voorgesteld om die absolute maatstaven te normaliseren.

	Backward linkages - Genormaliseerde maatstaven
Hypothetical extraction method	(1) *Daling van de productie per eenheid productie van bedrijfstak j* $\widetilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{h}} = \left(\mathrm{i}'\mathrm{x} - \mathrm{i}'\overline{\mathrm{x}}_{(cj)}\right)/x_j$ (2) *Daling van de productie in procent van de totale oorspronkelijke productie* $\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{h}} = 100 * \left[\left(\mathrm{i}'\mathrm{x} - \mathrm{i}'\overline{\mathrm{x}}_{(cj)}\right)/\mathrm{i}'\mathrm{x}\right]$ (3) *Ten opzichte van het gemiddelde van* $\overline{\boldsymbol{B}}_j^{\boldsymbol{h}}$ $\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{h}} = n\,\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{t})_j / \sum_{j=1}^{n} \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{t})_j$

5.2.3. Maatstaven van de stroomafwaartse relaties via de extractiemethode

Die maatstaven worden geraamd in het kader van een prijs-input-outputmodel van Ghosh. In dat geval wordt een bedrijfstak deels verwijderd uit de economie aan de hand van de hypothese dat hij geen binnenlandse intermediaire inputs meer levert (bijvoorbeeld in een scenario waarin een bedrijfstak beslist om die productie te exporteren).

	Forward linkages - Absolute maatstaven
Hypothetical extraction method	In het kader van een prijs-input-outputmodel van Ghosh, is de vector van de productie van een economie gelijk aan $\mathrm{x}' = \tilde{\mathrm{v}}'\left(\mathrm{I} - \mathrm{B}^{\mathrm{d}}\right)^{-1}$ Door de matrix $\overline{\mathrm{B}}_{(rj)}^{\mathrm{d}}$ te bepalen als *de matrix van de allocatiecoëfficiënten waarvan de* j^e *regel vervangen is door nullen,* kan de productie geraamd worden die gerealiseerd zou worden in een economie **indien bedrijfstak j geen binnenlandse intermediaire inputs meer levert.** $\overline{\mathrm{x}}'_{(\mathrm{r}j)} = \tilde{v}'\left(\mathrm{I} - \overline{\mathrm{B}}_{(rj)}^{\mathrm{d}}\right)^{-1}$ De **stroomafwaartse relaties** van bedrijfstak j kunnen gemeten worden door het verschil tussen de totale oorspronkelijke productie afkomstig van het prijsmodel van Ghosh en de totale productie die gerealiseerd zou worden indien de stroomafwaartse relaties van bedrijfstak j zouden wegvallen $\mathrm{F}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{h}} = \mathrm{x}'\mathrm{i} - \overline{\mathrm{x}}'_{(\mathrm{r}j)}\mathrm{i}$

Een alternatieve maatstaf voor de stroomafwaartse verbanden van bedrijfstak j via de extractiemethode bestaat erin de leveringen binnen de bedrijfstak niet te elimineren ($b_{jj}^{d} \neq 0$) (Miller en Lahr, 2001).

In de literatuur worden verschillende manieren voorgesteld om die absolute maatstaven te normaliseren.

	Forward Linkages - Genormaliseerde maatstaven
Hypothetical extraction method	(1) *Daling van de productie per eenheid productie van bedrijfstak j* $\tilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{h}} = \left(\mathrm{i}'\mathrm{x} - \mathrm{i}'\bar{\mathrm{x}}_{(\mathrm{r}j)}\right)/x_j$ (2) *Daling van de productie in procent van de totale oorspronkelijke productie* $\bar{\mathrm{F}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{h}} = 100 * \left[\left(\mathrm{i}'\mathrm{x} - \mathrm{i}'\bar{\mathrm{x}}_{(\mathrm{r}j)}\right)/\mathrm{i}'\mathrm{x}\right]$ (3) *Ten opzichte van het gemiddelde van* $\bar{F}_j^h$ $\hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{h}} = n\,\bar{\mathrm{F}}(\mathrm{t})_j / \sum_{j=1}^{n} \bar{\mathrm{F}}(\mathrm{t})_j$

5.2.4. Formalisering van het probleem van hypothetische verwijdering

Praktisch gezien vereist de toepassing van de HEM-methode voor het opstellen van een rangorde van bedrijfstakken volgens orde van belang het afzonderlijk verwijderen van elke bedrijfstak om het resulterende productieverlies voor de economie te ramen. Indien het gaat om een groot aantal bedrijfstakken, vergt dat dus enorm veel werk.

Temurshoev (2010) stelt een " meer eenvoudige (en elegante) methode voor om hetzelfde resultaat te bereiken". Hij drukt het probleem van hypothetische verwijdering uit als een optimaliseringsprobleem: de doelstelling bestaat erin de bedrijfstak te identificeren waarvan de verwijdering het grootste productieverlies inhoudt voor de economie:

$$\max\left\{\mathrm{i}'\mathrm{x} - \mathrm{i}'\bar{\mathrm{x}}_{(j)} \mid j = 1, \dots, \mathrm{n}\right\}$$

Hij toont aan dat het probleem als volgt geherformuleerd kan worden:

$$\max\left\{m_j^o x_j / l_{jj} \mid j = 1, \dots, \mathrm{n}\right\}$$

met $m_j^o = \mathrm{BL}(\mathrm{t})_j$ als de enkelvoudige productiemultiplicator van bedrijfstak j, x_j als de productie van bedrijfstak j en l_{jj} als de totale eigen afhankelijkheid in termen van intermediaire inputs van bedrijfstak j.

Hij definieert de ratio $m_j^o x_j / l_{jj} = w_j^o$, 'the gross output worth of sector j'.

Die formulering maakt het mogelijk de verschillende elementen te onderscheiden die bepalend zijn in de totale linkagemaatstaven afgeleid uit de HEM-methode. De ‘gross output worth of sector j’ is niet alleen afhankelijk van de productiemultiplicator (of total backward linkage) van die bedrijfstak. Ze houdt tevens rekening met de omvang (gemeten door de productie ervan, x_j) en de totale eigen afhankelijkheid in termen van intermediaire inputs (aangeduid door l_{jj})[16]. De omvang van de productie heeft een positieve impact op de maatstaf, terwijl de afhankelijkheid van de eigen productie het omgekeerde effect teweegbrengt.

<table>
<tr><td></td><td>Linkages - Absolute maatstaven - formalisering</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Hypothetical extraction method</td><td>De totale relaties van bedrijfstak j kunnen gemakkelijk geraamd worden via de HEM-methode door gebruik te maken van de volgende formule
$$\mathrm{T}^{\mathrm{h}}_{(j)} = w^o_j = m^o_j x_j / l_{jj} = \mathrm{BL(t)}_j x_j / l_{jj}$$</td></tr>
<tr><td>Op dezelfde manier tonen Temurshoev en Oosterhaven (2010) aan dat de maatstaf van de stroomopwaartse relaties van bedrijfstak j afgeleid van de HEM-methode gelijk is aan
$$\mathrm{B}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{j}} = \frac{\left(\mathrm{BL(t)}_j - 1\right) x_j}{l_{jj}}$$
en de maatstaf van de stroomafwaartse relaties van bedrijfstak j afgeleid van de HEM-methode gelijk is aan
$$\mathrm{F}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{j}} = \frac{\left(\mathrm{FL(t)}_j - 1\right) x_j}{l_{jj}}$$</td></tr>
<tr><td></td><td>Linkages - Genormaliseerde maatstaven - formalisering</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Hypothetical extraction method</td><td>Om maatstaven 'zonder eenheid' te verkrijgen, kan een beroep worden gedaan op een genormaliseerde maatstaf van de totale relaties, bijvoorbeeld per eenheid productie van bedrijfstak j:
$$\mathrm{T}^{\mathrm{h}}_{(j)} / x_j = m^o_j x_j / l_{jj} = \mathrm{BL(t)}_j / l_{jj}$$</td></tr>
<tr><td>De genormaliseerde maatstaven (per eenheid productie van bedrijfstak j) van de stroomopwaartse en -afwaartse relaties afgeleid van de HEM-methode zijn gelijk aan
$$\tilde{\mathrm{B}}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{j}} = \frac{(\mathrm{BL(t)}_j - 1)}{l_{jj}} \quad \text{en} \quad \tilde{\mathrm{F}}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{j}} = \frac{(\mathrm{FL(t)}_j - 1)}{l_{jj}}$$</td></tr>
</table>

Samengevat maken de werkzaamheden van Temurshoev en Oosterhaven het mogelijk om:

- de intensiteit van de relaties van de verschillende bedrijfstakken te meten via de HEM-methode, zonder daarbij iedere bedrijfstak afzonderlijk te moeten verwijderen;
- het belang van element l_{jj} te isoleren om de sleutelsectoren van een economie te bepalen: een bedrijfstak waarvan het productieproces grotendeels afhangt van de inputs afkomstig uit de eigen

[16] Met $l_{jj} = g_{jj}, \forall j$

productie heeft minder mogelijkheden om een exogene schok doorheen de economie te verspreiden;

– aan te tonen dat de verschillende linkagemaatstaven onderling verbonden zijn:

$$\mathrm{B}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{T}_{(j)}^{\mathrm{h}}\,(\mathrm{BL(t)_j}-1)}{\mathrm{BL(t)}_j} \qquad \text{en} \qquad \mathrm{F}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{T}_{(j)}^{\mathrm{h}}\,(\mathrm{FL(t)_j}-1)}{\mathrm{BL(t)}_j}$$

5.3. Veralgemening van de linkagemaatstaven

Alle eerder vermelde linkagemaatstaven werden bepaald in termen van productie. Het relatieve belang van een bedrijfstak voor een economie kan ook beschreven worden aan de hand van andere economische, sociale en milieugerelateerde factoren, bijvoorbeeld in termen van werkgelegenheidscreatie, vervuilende emissies... Vandaag de dag worden de linkageanalyses voornamelijk gebruikt om milieugerelateerde vragen, zoals 'welke zijn de sleutelbedrijfstakken met een grote milieu-impact in termen van energieverbruik, waterverbruik, CO_2-uitstoot ... ?'.

Door in het input-outputkader rekening te houden met andere indicatoren dan de productie kunnen de verschillende linkagemaatstaven veralgemeend worden (Temurshoev (2010) en Temurshoev en Oosterhaven (2010)).

Zij π, de vector (n x 1) van de *directe gebruiks-/productiecoëfficiënten* van de factor die men wenst te analyseren (bijvoorbeeld het waterverbruik of de CO_2-uitstoot) per eenheid productie[17]. Onderstaand kader toont de veralgemeende vorm van de verschillende eerder voorgestelde linkagemaatstaven.

<table>
<tr><th></th><th>Veralgemeende linkagemaatstaven</th></tr>
<tr><td rowspan="2">The Classical Multiplier Method</td><td>De veralgemeende vorm van de enkelvoudige maatstaf van de totale stroomopwaartse relaties van bedrijfstak j door de traditionele methode (total factor backward linkage) is gelijk aan:
$$\mathrm{BL(t)}_j^{\pi} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i l_{ij}$$</td></tr>
<tr><td>De veralgemeende vorm van de enkelvoudige maatstaf van de totale stroomafwaartse relaties van bedrijfstak j op basis van de traditionele methode (total factor forward linkage) is gelijk aan:
$$\mathrm{FL(t)}_j^{\pi} = \sum_{i=1}^{n} g_{ji}\pi_i$$</td></tr>
<tr><td>The hypothetical extraction method</td><td>Indien, in het kader van de veralgemeende HEM-methode, bedrijfstak j integraal wordt verwijderd, wordt het probleem van maximalisering:
$$\max\left\{\pi'\mathrm{x} - \pi'\bar{\mathrm{x}}_{(j)} \mid j = 1, \dots, \mathrm{n}\right\}$$
De oplossing voor dit probleem is de 'Hypothetical extraction factor total linkage'
$$\mathrm{T}_{(j)}^{\pi,\mathrm{h}} = w_j^{\pi} = \frac{\mathrm{BL(t)}_j^{\pi} x_j}{l_{jj}}$$</td></tr>
</table>

[17] Wanneer $\pi_i = 1, \forall i$, veranderen de veralgemeende maatstaven in linkagemaatstaven gebaseerd op de productie.

The hypothetical extraction method	Indien bedrijfstak j **gedeeltelijk** wordt verwijderd, worden de volgende veralgemeende linkagemaatstaven verkregen: *Hypothetical extraction factor backward linkage* $$\mathrm{B}_{\mathrm{j}}^{\pi,\mathrm{h}} = \frac{\left(\mathrm{BL(t)}_{j}^{\pi} - \pi_j\right)x_j}{l_{jj}}$$ *Hypothetical extraction factor forward linkage* $$\mathrm{F}_{\mathrm{j}}^{\pi,\mathrm{h}} = \frac{\left(\mathrm{FL(t)}_{j}^{\pi} - \pi_{\mathrm{j}}\right)x_j}{l_{jj}}$$
	Door de verschillende maatstaven te delen door de totale door bedrijfstak j geproduceerde/gebruikte hoeveelheid van de bestudeerde factor, worden de volgende **genormaliseerde maatstaven** verkregen: *Hypothetical extraction normalized factor total linkage* $\widetilde{\mathrm{T}}_{(j)}^{\pi,\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{BL(t)}_{\mathrm{j}}^{\pi}}{\pi_j l_{jj}}$ *Hypothetical extraction normalized factor backward linkage* $\widetilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{j}}^{\pi,\mathrm{h}} = \left(\mathrm{BL(t)}_{\mathrm{j}}^{\pi} - \pi_{\mathrm{j}}\right)/\pi_{\mathrm{j}}\mathrm{l}_{\mathrm{jj}}$ *Hypothetical extraction normalized factor forward linkage* $\widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{j}}^{\pi,\mathrm{h}} = \left(\mathrm{FL(t)}_{\mathrm{j}}^{\pi} - \pi_{\mathrm{j}}\right)/\pi_{\mathrm{j}}\mathrm{l}_{\mathrm{jj}}$

Referenties

Cella G. (1984), 'The input-Output Measurement of Interindustry Linkages', Oxford Bulletin of Economics and Statistics, vol. 46, n° 1, pp. 73-84.

Chenery H. B. and T. Watanabe (1958), 'International Comparisons of the Structure of Production', Econometrica, vol. 26, n°4 , pp. 487-521.

Dietzenbacher E. (1997), 'In Vindication of the Ghosh Model: A Reinterpretation as a Price Model', Journal of Regional Science, vol. 37, n° 4, pp. 629-651.

Dietzenbacher E. (2005), 'More on Multipliers', Journal of Regional Science, vol. 45, n° 2, pp. 421-426.

Dietzenbacher E. and J. A. van der Linden (1997), 'Sectoral and Spatial Linkages in the EC Production Structure', Journal of Regional Science, vol. 37, n° 2, pp. 235-257.

Eurostat (1996), Europees systeem van rekeningen ESR 1995, Luxemburg.

Ghosh A. (1958), 'Input-Output Approach to an Allocation System', Economica, vol. 25, n° 97, pp.58-64.

Guerra A-I. and F. Sancho (2010), 'Merging the Hypothetical Extraction Method and the Classical Multiplier Approach : A Hybrid Possibility', paper (unpublished) presented at the 18th International Input-Output Conference, Sydney, 25-28 June 2010.

Hirschman A. O. (1958), The Strategy of Economic Development, New Haven, Yale University Press.

Instituut voor de Nationale Rekeningen (1998), 'De input-outputtabel van 1985 – Een analyse van de economische structuur van België', Federaal Planbureau, Brussel.

Instituut voor de Nationale Rekeningen (1999), 'De input-outputtabel van 1990 – Een analyse van de economische structuur van België', Federaal Planbureau, Brussel.

Institut des Comptes Nationaux (2003), 'Quelques Applications à l'aide du Tableau Entrées-Sorties 1995', Working Paper 18-03, Bureau fédéral du Plan, Bruxelles.

Jones L. (1976), 'The Measurement of Hirschmanian Linkages', Quarterly Journal of Economics, vol. 90, n° 2, pp. 323-333.

Johnson T. G. and S. N. Kulshreshta (1982), 'Exogenizing Agriculture in an Input-Output Model to Estimate Relative Impacts of Different Farm Types', Western Journal of Agricultural Economics, vol. 7, n° 2, pp.187-198.

Koller W. and M. Luptacik (2007), 'Measuring the Economic Importance of an Industry : An Application to the Austrian Agricultural Sector', paper (unpublished) presented at the 16th International Input-Output Conference, Istanbul, 2-6 July 2007.

Leontief W. W. (1936), 'Quantitative Input-Output Relations in the Economic System of the United State', Review on Economics and Statistics, vol. 18, n° , pp.105-125.

de Mesnard L. (2002), 'Note about the Concept of 'Net Multipliers', Journal of Regional Science, vol. 42, n° 3, pp. 545-548.

de Mesnard L. (2007a), 'A Critical Comment on Oosterhaven-Stedler Net Multipliers', The Annals of Regional Science, vol. 41, n° 2, pp. 249-271.

de Mesnard L. (2007b), 'Reply to Oosterhaven's: the Net Multiplier is a New Key Sector Indicator', The Annals of Regional Science, vol. 41, n° 2, pp. 285-296.

Miller, R. E. and P. D. Blair (1985), Input-Output Analysis : Foundations and Extensions. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall.

Miller, R. E. and P. D. Blair (2009), Input-Output Analysis : Foundations and Extensions. Cambridge, Cambridge University Press, second edition.

Miller, R. E. and M. L. Lahr (2001), 'A Taxonomy of Extractions' in M. L. Lahr and R. E. Miller (eds.) : Regional Science Perspectives in Economics: A festschrift in Memory of Benjamin H. Stevens, Amsterdam, Elsevier Science, pp. 407-441.

Miyazawa K. (1976), Input-Output Analysis ant the Structure of Income Distribution, Heidelberg, Springer.

Oosterhaven J. (1988), 'On the Plausibility of the Supply-Driven Input-Output Model', Journal of Regional Science, vol. 28, n° 2, pp. 203-217.

Oosterhaven J. (1996), 'Leontief versus Ghoshian Price and Quantity Models', Southern Economic Journal, vol. 62, n° 3, pp. 750-759.

Oosterhaven J. (2007), 'The Net Multiplier is a New Key Sector Indicator: Reply to de Mesnard's Comment', The Annals of Regional Science, vol. 41, n° 2, pp. 273-283.

Oosterhaven J., G. Piek and D. Stedler (1986), 'Theory and Practice of Updating Regional versus Interregional Interindustry Tables', Papers of the Regional Science Association, vol. 59, pp. 57-72.

Oosterhaven J. and D. Stedler (2002), 'Net Multipliers Avoid Exaggerating Impact : With a Bi-Regional Illustration for the Dutch Transportation Sector', Journal of Regional Science, vol. 42, n° 3, pp. 533-543.

Paelinck J., J. de Caevel et J. Degueldre (1965), 'Analyse quantitative de certains phénomènes du développement régional polarisé : essai de simulation statique d'itinéraires de propagation', dans Problèmes de conversion économique : Analyses Théoriques et Etudes Appliquées, Bibliothèque de l'Institut de Sciences Economiques de l'Université de Liège, n°7, p. 341-387.

Rasmussen P. N. (1957), Studies in Intersectoral Relations, Amsterdam, North-Holland.

Strassert G. (1968), 'Zur Bestimmung stratigischer Sektoren mit Hilfe von Input-Output Modellen', Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, vol. 182, pp. 211-215.

Temurshoev U. (2010, March 18), 'Identifying Optimal Sector Groupings with the Hypothetical Extraction Method', in Temurshoev U. : Interdependences : Essays on Cross-Shareholdings, Social Networks and Sectoral Linkages, PhD Theses, University of Groningen.

Temurshoev U. and J. Oosterhaven (2010), 'On Input-Output Linkage Measures', Working Paper Series, University of Groningen.

West G.R. and R.C. Jensen (1980), 'Some Reflections on Input-Output Multipliers', The Annals of Regional Science, vol. 14, n° 2, pp. 77-89.